DENSITÀ E RIPARTIZIONI

- Funzione **densità di probabilità** (**PDF**): è la funzione di probabilità di una variabile casuale h nel caso in cui sia continua: $f_h(H) = \lim_{dH \to 0} \frac{P(H_i \leq h \leq H_i + dH)}{dH}$, $f_h(H) \geq 0$ e $\int_R f_h(H)\, dH = 1$
- Funzione di **ripartizione** (**CDF**): data una v.c. H, è una funzione che fa corrispondere ai valori di h le probabilità cumulate $P(H \leq h)$. Si indica con $F_h(H) = P(H \leq h)$

CDF = integrale su R di PDF **PDF = derivata di CDF sulla v.c.**

- **Trasformazioni alla densità**: caso con v.c. x,y e $y = f(x)$.
  Es: $y = x^2$ ed x v.c. uniforme compresa tra 0 e 10 (quindi un rettangolo (base 0->10) (altezza 1/10)) ->mi riporto uno sotto l'altro i grafici di $f_x(x)$ e di y, considero un dX fissato e vedo i valori corrispondenti su Y. Tali valori li mappo in un grafico adiacente di $f_y(y)$.
  Svolg: per X fissato ed Y fissato, si ha: $f_y(Y)dY = f_x(X)dX$. Sostituisco ad X o ad Y il valore $y = x^2$, ($x = \sqrt{y}$) e soddisfo la richiesta (vedi t.e. 23/11/2018)
- **Densità e ripartizioni 2D**: date due v.c. x,y si ha:
  $f_{x,y}(x,y) = f_{x|_y}(X|_y) \cdot f_y(Y) = f_x(X) \cdot f_{y|_x}(Y|_x)$. Se indipendenti, $f_{x,y}(X,Y) = f_x(X) f_y(Y)$
  Svolg: fisso una delle due v.c. in modo tale da non complicarmi la vita ed avere uno shift (punto C esercitazione 28/10/19). A questo punto, in base ai valori della variabile fissata, vado a portare tutto in un grafico Y, X
- **Densità di probabilità di una variabile dipendente da due variabili**: Dato $y = x + e$ la marginale vale $P_y(y) = P_x(y) * P_e(y)$ se x, e indipendenti. Altrimenti prendo la congiunta $P_{x,y}(X,Y)$ e sommo i punti rispetto all'asse y.

MOMENTI

- **Momenti non centrali**
  - $m_{kx} = E[x^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_x(x)\, dx$
- **Momenti centrali**
  - $\mu_{kx} = E[(x - E[x])^k] = E[(x - m_{1x})^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_{1x})^k f_x(x) dx$
  - Per $\boldsymbol{k} = \mathbf{1}$ si parla di $valore\ medio$
    - $\mu_{1x} = E[x - m_{1x}]$
  - Per $\boldsymbol{k} = \mathbf{2}$ si parla di $varianza$
    - $\mu_{2x} = \sigma^2 = var[x]$
      - $\sigma_x^2 = E[(x - m_{1x})^2] = E[x^2] - 2E[x] m_{1x} + m_{1x}^2 = E[x^2] - m_{1x}^2$
    - $\boldsymbol{momento\ centrale\ di\ secondo\ ordine}\ E[x^2] = m_{1x}^2 + \sigma_x^2$
    - $\boldsymbol{deviazione\ standard\ (STD)}:\ \sigma = \sqrt{\mu_{2x}}$
  - Per **k = 3** si parla di *skewness*
  - Per **k = 4** si parla di *curtosi*

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

- **Correlazione** (momento congiunto)
  - $E[xy] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{xy}(x,y) dx dy$
- **Momento centrale**
  - $E\left[(x - m_{1x})(y - m_{1y})\right] = E[xy] - m_{1x} m_{1y} = \sigma_{xy}$

- **Coefficiente di correlazione lineare**
  - $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}\ con\ |r| \leq 1$
    - Se $r = 0$ le due funzioni sono *scorrelate* e $E[xy] = E[x]E[y]$ ed x ed y sono legate tra di loro in modo deterministico $y = ax + b$
    - Se $r = -1$ le due funzioni sono *anticorrelate* $(per\ esempio\ y = -x)$
    - Se $r = 1$ le due funzioni sono *correlate* $(per\ esempio\ y = x)$

- **Varianza di v.c. scorrelate**
  - $z = x + y, E[x] = E[y] = 0$
  - $\sigma^2[z] = E[(x+y)^2]\ - (E[x])^2 = E[x^2] + E[y^2] + E[xy] - (E[x])^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + E[x]E[y] - (E[x])^2 \Rightarrow \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - (E[x])^2$

DISTRIBUZIONI

- Distribuzione **Gaussiana**
  - Espressa anche come $N(\mu, \sigma^2)$
  - $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e\hat{}(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2)$
  - Valore atteso $E[x] = \mu$
  - Varianza $VAR(x) = \frac{p(1-p)}{N}$
  - Deviazione standard $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$
    - $3\sigma = 99.7\%\ delle\ prove \Rightarrow 3\sigma = (1 - .997) \cdot p$
  - Media $m = Np$
  - Q-Function $Q(x) = P(X > x)$ con $x = \frac{X-m}{\sigma}$
  - Trovare N esperimenti per ottenere un errore minore di una soglia ε:
    - $\varepsilon = \frac{\widehat{p_X} - p_x}{p_x} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{\sigma}{p} = \frac{\sigma\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N} \cdot p} = \frac{1}{\sqrt{Np}}$ Dove STD è $\sigma = 1$ se 66% e $\sigma = 3$ se 99%
- Distribuzione **uniforme**
  - Varianza $VAR(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$
  - Deviazione standard $\sigma = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}}$
- Distribuzione **Binomiale**
  - $P(x) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$
  - $\lambda = Np$
- Distribuzione **Geometrica**
  - $P_n(N) = q^{N-1}p$
  - $P\left(N = N_i|_{N>N_j}\right) = pq^{N_i - N_j - 1}$
- **Approssimazione** della Binomiale tramite **Poisson** $kp \ll 1$
  - $P(x) \cong \frac{(Np)^k}{k!} \exp{(-Np)}$
  - $\lambda = Np$
- **Approssimazione** della Binomiale tramite **Gaussiana** $kp \approx \lambda \to N \approx k$
  - $P(x) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda(1-p)}} \exp\left(\frac{(k-\lambda)^2}{2\lambda(1-p)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Np(1-p)}} \exp\left(\frac{(k-Np)^2}{2Np(1-p)}\right)$
- **Trasformazioni**
  - $p_z(z)dz = p(x)dx \Rightarrow p_z(z) = \frac{p(\bar{x}, \bar{x} = x(z))}{|\frac{dz}{dx}|}$
- **Probabilità marginale**
  - $p_v = \int p_{vz}(v, z)dz$
- **Probabilità congiunta**
  - $p(x, y) = p(y|x)p(x) = p(x|y)p(y)$
    - Se x ed y sono variabili discrete, si fa variare y tenendo fermo x
    - Se x ed y sono variabili continue, $p(x, y) = p(x) \cdot p(y)$

PROBABILITÀ

- Probabilità **fallimento**: $(1 - P)$, con P probabilità di successo
- Probabilità **che <u>non</u> accada un evento**: $P = 1 - (1 - p)^n$
- $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A, B)$
- Probabilità **condizionata** $P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$
- **Eventi totalmente dipendenti**
  $P(A|_B) = 1$
- **Eventi indipendenti**
  - $P(A) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \Rightarrow P(A, B) = P(A)P(B)$
  - $P(A|B) = P(A)$

- **Probabilità totale**
  - $P(A) = \sum_{n=1}^{N} P(A, B_n) = \sum_{n=1}^{N} P(A|B_n)P(B_n)$
- **Regola di Bayes**
  - $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)} \;\Rightarrow\; P(A|_B\,) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$
  - $P(B|A) = P(A|B)\frac{P(B)}{P(A)}\; se\ A = \bar{B}$

SEGNALI

- **Proprietà di un segnale reale**
  - $x^*(t) = x(t)$
  - $|x(t)|^2 = x(t) \cdot x^*(t) \Leftrightarrow |X(f)|^2 = X(f) \cdot X^*(f)$
  - $x(-t) = x(t) \Leftrightarrow X(-f) = X(f)$
- **Definizione di trasformata di Fourier**
  - $X(f) = \int x(t)e^{-j2\pi ft}dt$
- **Proprietà della trasformata di Fourier – CONTINUA QUESTE**
  - $\alpha x(t) + \beta x(t) \Leftrightarrow \alpha X(f) + \beta X(f)$ ***linearità***
  - $x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-f), se\ x(t) \in \mathcal{R} \Rightarrow x(-t) = X^*(f)$ ***simmetria***
  - $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt\,,\ x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)df$ ***valori nell'origine***
  - $X(t) \Leftrightarrow x(-t)$ ***dualità***
  - $x(\alpha t) \Leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|}X(\frac{f}{\alpha})$ ***scalatura***
  - $x(t-t_0) \Leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0}$ ***traslazione nei tempi***
  - $x(t)e^{j2\pi ft_0} \Leftrightarrow X(f-f_0)$ ***traslazione in frequenza***
  - $\frac{dx(t)}{d} \Leftrightarrow j2\pi f \cdot X(f)$ ***derivazione***
- **Definizione di convoluzione**
  - $f(t) * g(t) = \int f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
- **Cross correlazione**
  - $R_{xy}(t) = y(t) * x(-t)^*$
  - $Se\, x(t) = y(t)\ si\ parla\ di\ autocorrelazione$
    - $R_{xx}(t) = \int |X(f)|^2 e^{-j2\pi f\tau}df,\ R_{xx}(0) = E_x$
- **Convoluzione e prodotto nei domini del tempo e delle frequenze**
  - $x(t) \cdot y(t) = X(f) * Y(f)$
  - $x(t) * y(t) = X(f) \cdot Y(f)$
- **Relazione di Parseval**
  - $E = \int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df$
  - $\int \mathrm{y(t)}x^*(t)dt = \int Y(f)X^*(f)df$
- **Teorema di Shannon**
  - $f_c \geq B$ con B banda bilatera
    - $\boldsymbol{IMPORTANTE}\ X(f)\ definito\ in\ \left(-\frac{B}{2},\frac{B}{2}\right)$ con B banda bilatera di $X(f)$
    - $\boldsymbol{IMPORTANTE}\ f_c \geq 2 \cdot f_m$ con f_m frequenza massima del segnale
- **Campionamento di un segnale continuo**
  - $X_c(f) = X(f) * \frac{1}{T_c}\sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T_c}\right) = X(f) * f_c \sum_k \delta(f - kf_c) = \frac{1}{T_c}\sum_k x\left(f - \frac{k}{T_c}\right) =$
    $= f_c \sum_k x(f - kf_c)$
- **Spettro di potenza del campionamento di un segnale continuo**
  - $S_c(f) = F\big(R_x(t = nT_c)\big)$
    - $\Rightarrow$ Si discretizza la $R_x(\tau)$ come $R_x(t = nT_c)$ e se ne calcola l'anti trasformata
- **Seno cardinale**
  - $sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, sinc(at) = \frac{sin(\pi\alpha t)}{\pi\alpha t}$
  - $x(t) = sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \Rightarrow X(f) = rect(f)$
  - $x(t) = sinc(\alpha t) = \frac{\sin(\pi\alpha t)}{\pi\alpha t} \Rightarrow X(f) = \frac{1}{\alpha}rect(\frac{f}{\alpha})$
  - $x(t) = \beta sinc(\beta t) = \frac{\sin(\pi\beta t)}{\pi t} \Rightarrow X(f) = rect(\frac{f}{\beta})$
- **Triangolo**
  - $X(f) = tripulse\left(\frac{f}{2}\right) \Rightarrow x(t) = sinc^2(t)$
  - $X(f) = rect\left(\frac{f}{\beta}\right) \Rightarrow X(f) * X(f) = \beta \cdot tripulse(\frac{f}{2\beta})$

- **Coseno**
  - $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \Rightarrow X(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_o))$
  - $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi) \Rightarrow X(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0)\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\phi} + \delta(f + f_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi})$
  - $x(t) = \cos\big(2\pi f_o(t - \tau)\big) \Rightarrow X(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0)\mathrm{e}^{+\mathrm{j}2\pi \mathrm{f}_0\tau} + \delta(f + f_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \mathrm{f}_0\tau})$
- **Seno**
  - $x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \Rightarrow X(f) = \frac{1}{2j}(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_o))$
  - $x(t) = \sin(2\pi f_0 t + \phi) \Rightarrow X(f) = \frac{1}{2j}(\delta(f - f_0)\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\phi} - \delta(f + f_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi})$
  - $x(t) = \sin\big(2\pi f_o(t - \tau)\big) \Rightarrow X(f) = \frac{1}{2j}(\delta(f - f_0)\mathrm{e}^{+\mathrm{j}2\pi \mathrm{f}_0\tau} - \delta(f + f_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \mathrm{f}_0\tau})$
- **Esponenziale**
  - $x(t) = u(t) \cdot e^{-|a| \cdot t}, u(t)\ scalino, a > 0 \Rightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$
- **Delta e costante**
  - $x(t) = 1 \Rightarrow X(f) = \delta \Leftrightarrow X(f) = 1 \Rightarrow x(t) = \delta$
  - $x(t) = e^{-\mathrm{j}2\pi \mathrm{f}_0\tau} \Rightarrow X(f) = \delta(f - f_0)$
  - $\delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$
  - $\delta_k \Rightarrow 1$
- **Rect**
  - $x(t) = rect(t) \Rightarrow X(f) = sinc(f)$
  - $x(t) = rect(at) \Rightarrow X(f) = \frac{1}{a} sinc(\frac{f}{a})$
  - $X(f) = rect(f) \Rightarrow x(t) = sinc(t)$
  - $X(f) = \frac{1}{\alpha} rect\left(\frac{f}{\alpha}\right) \Rightarrow x(t) = sinc(\alpha t)$
- **Convoluzione di rect**
  - $rect\left(\frac{t}{\tau_1}\right) * rect\left(\frac{t}{\tau_2}\right) \Rightarrow quadrilatero\ con \begin{cases} base\ maggiore: \tau_1 + \tau_2 \\ base\ minore: |\tau_1 - \tau_2| \\ altezza: il\ minore\ tra\ \tau_1\ e\ \tau_2 \end{cases}$
    - $A \cdot rect\left(\frac{t}{\tau}\right) * B \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right) = AB\tau \cdot tripulse(\frac{t}{2\tau})$
- **Potenze**
  - Le potenze si sommano in ragione quadratica
    - $P(t) = \sum_i P(i)^2$
  - Potenza di un segnale sinusoidale $x(t) = Asin(2\pi f_0 t)$
    - $E_x = |x(t)|^2 = \frac{1}{2}A^2$
    - $P_x = \frac{1}{2}A^2$

PROCESSI

- **Valore atteso di x**
  - $\mu_x(t) = E[x(t)]$
- **Potenza di x**
  - $P_x(t) = E[|x(t)|^2]$
  - $P_x(t) = R_x(t,t) = R_x(0)$
  - $P_x(f) = \int S_y(f)df$
- **Spettro di potenza di x**
  - $S_x(f) = E[|X(f)|^2]$
    - Se nello spettro di potenza **sono assenti delta**, il valore atteso è **nullo**
    - Se nello spettro di potenza **ci sono delle delta**, il valore atteso è pari **all'area della delta**
- **Varianza di x**
  - $\sigma^2(x) = E[|x(t)| - E[|x(t)|^2] = P_x(t) - |\mu_x(t)|^2$
  - $\sigma_x^2 = C_x(t,t) = C_x(0)$
- **Auto correlazione di x**
  - $R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x^*(t_2)] = \int x(t+\tau)x^*(t)dt$
    - Valido perché $|x(t)^2| = x(t)x^*(t)$
- **Auto covarianza di x**
  - $C_x(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - E[x(t_1)])(x(t_2) - E[x(t_2)])] = R_x(t_1, t_2) - E[x(t_2)]E[x(t_1)]$
- **Teorema di Wiener** *per processi stazionari*
  - $S_x(f) = F\left(R_x(\tau)\right) = \int R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$
  - $S_{yx}(f) = F(R_{xy}(\tau))$
  - $R_x(\tau) = F^{-1}\left(S_x(f)\right) = \int S_x(f)e^{j2\pi f\tau}df$
    - $y(t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t} \Rightarrow R_y(\tau) = R_x(\tau)e^{j2\pi f_0 t}, S_y(f) = S_x(f - f_0)$
- **Processi filtrati da un sistema LTI** $con\ Y(f) = X(f)H(f),\ \ h(t)\ filtro\ LTI$
  - **Auto correlazione**
    - $R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(t) * h^*(-t) \Rightarrow R_x(\tau) * h(t) * h(-t)\ se\ h(t)$ è $reale$
    - $R_{xy}(\tau) = r_x(\tau) * h(t)$
  - **Auto covarianza**
    - $C_y(\tau) = R_y(\tau) - \mu_y^2$
  - $|Y(f)|^2 = |X(f)|^2 \cdot |H(f)|^2$
  - $S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2$
  - $S_{yx}(f) = H^*(f) \cdot S_x(f) \Rightarrow R_{yx}(t) = R_x(\tau) * h(\tau)$
  - $E[y(t)] = \mu_x \cdot H(0)$
- **Rumore bianco**
  - Autocorrelazione impulsiva o densità spettrale di potenza costante (condizioni equivalenti)
  - $S_x(f) = \frac{P}{B} rect\left(\frac{f}{B}\right) \Rightarrow R_x(\tau) = P \cdot sinc(Bt) = P \cdot \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt}\ per\ il\ Th.\, di\ Weiner$
    - $\boldsymbol{IMPORTANTE}\ X(f)\ definito\ in\ \left(-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}\right) \Rightarrow banda\ bilatera\ B$
  - Se n è la ddp del segnale
    - $R_x(n) = \sigma_x^2\delta(n) + \mu$
    - $S_x(f) = \mu + \sigma_x^2\delta(f)$
  - $N_0 = kT$
  - $S_w(f) = \frac{N_0}{2} = \frac{kT}{2}$

- Processi stazionari
    - $R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$
    - $R_x(0) = \sigma_x^2 \ se \ \mu_x = 0 \Rightarrow P_x = R_x(0) = E[|x(t)^2|]$
    - $R_x(-\tau) = R_x^*(\tau)$
    - $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$

TRASMISSIONI

- **Massima velocità di trasmissione**
  - $impulsi\ a\ spettro\ rettangolare\ g(t) = sinc(t \cdot R_b) \Leftrightarrow G(f) = rect(\frac{f}{R_b})$
  - $R_b = 2 \cdot f_m$ con f_m frequenza massima del segnale
- **Filtro adattato**
  - $non\ si\ usa\ quando\ il\ canale\ di\ trasmissione$ è $un\ passa\ basso$
- **Potenza in trasmissione**
  - $P_T = \frac{2E_r}{N_0} = \frac{2P_r/T_B}{LN_0}$
  - $P_{Tdbw} = P_T + L_{dB} + \left(\frac{N_0}{2}\right)_{dBW} + R_{dB}$
- **Potenza media di un bit in trasmissione**
  - $P_T = \frac{P_r}{h_0^2} = \frac{E_r}{h_0^2 T} = \frac{E_r R_b}{h_0^2} = \frac{SNR_c \cdot R_b}{h_0^2}\frac{N_0}{2}$
- **Rapporto segnale rumore (SNR) al campionatore**
  - $SNR_c = \frac{E_r}{N_0/2} = \frac{P_T}{R_b \cdot L \cdot N_0/2}$
- **Assenza di ISI**
  - $\sum_k \left|G\left(f - \frac{k}{T_B}\right)\right|^2 = \sum_k |G(f - kR_B)|^2 = costante$
  - $ripetizione\ dello\ spettro\ del\ singolo\ impulso\ con\ frequenza\ R = cost \Rightarrow R_s = \frac{R_b}{2} = B$
  - **se il filtro adattato è somma di diversi rect sovrapposti:**
    - $la\ velocit$à $minima\ R_b\ per\ non\ avere\ ISI\ sar$à $pari\ alla\ somme\ delle\ bande$
    - $vedi\ TE$ 2015_02_12
- **Probabilità di errore**
  - $Errore\ sulla\ trasmissione \rightarrow P_s = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_r}{N_0}}\right) = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E_t/L}{N_0/2}}\right)$
  - $Errore\ sul\ BIT \rightarrow P_\epsilon = Q\left(\sqrt{SNR_c}\right) = \tilde{p} \Rightarrow SNR_c = \left(qfunc^{-1}(\tilde{p})\right)^2$
- **Banda**
  - $B = \frac{R_b(1+\alpha)}{2}$
- **Trasmissione multilivello**
  - $Errore\ sul\ BIT \rightarrow P_b = \frac{2(M-1)}{M \cdot k} \cdot Q\left(\sqrt{SNR}\right)$
  - $E_{si} = B \cdot |G(f)|^2$
- **Segnali antipodali**
  - $P_B = \frac{a^2 E_g}{T_B}$
  - $SNR_C = \frac{a^2 h_0^2 E_g}{N_0/2} = \frac{P_B T_c h_0^2}{N_0/2}$
- **Modulazione M-PAM**
  - $R_B = B \cdot 2^k$
  - $P_b = \frac{2(M-1)}{M \cdot k} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{3k}{(M^2-1)}\frac{2E_B}{N_0}}\right)$
  - $P_{Ts} = H_0 P_{Rs} = \frac{H_0 k E_b}{R}$
- **Spettro con modulazione a radice di Nyquist**
  - $B = \frac{1+\alpha}{2T_b} = \frac{1+\alpha}{2} \cdot R_b$
  - Passi da effettuare
    - Calcolo f_c (frequenza di campionamento) come $f_c > 2 \cdot f_s$
    - Calcolo R_b come $R_b = f_c \cdot N°\ di\ bit$
    - Calcolo B (banda minima in tempo reale) come $B = \frac{1+\alpha}{2} \cdot R_b$
- **Rindondanza media**
  - $R(x) = \sum_i P(x_i) \cdot l(x_i)$ con l lunghezza della parola

- **Entropia**
  - $H(x) = -\sum_i P(x_i) \cdot \log_b\big(P(x_i)\big)$ con b base delle cifre

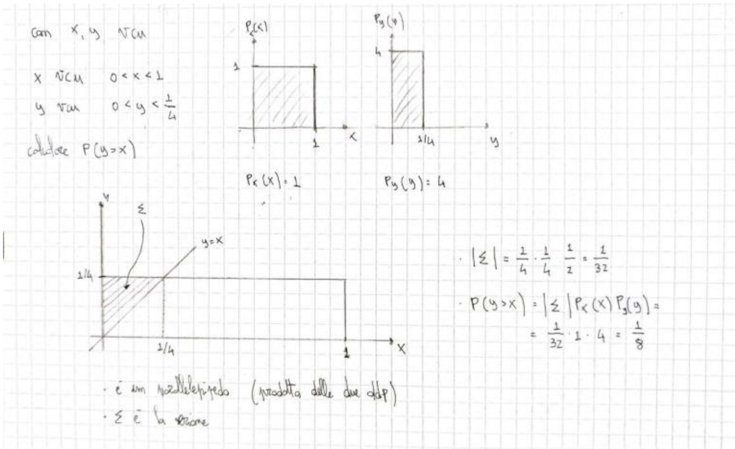
- **Decibel**
  - $dB = 20\log(n) \Leftrightarrow n = 10^{\frac{dB}{20}}$
  - $dBw = 10\log(n) \Leftrightarrow n = 10^{\frac{dbW}{10}}$
  - $dBm = 20\log\left(\frac{n}{1mW}\right) \Leftrightarrow n = 1mW \cdot 10^{\frac{dBm}{10}}$

TRIGONOMERIA

- Formula di Eulero
  - $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + isen(\alpha)$
  - $\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}$
  - $\sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j}$
- Formule di Werner
  - $cos(\alpha)\, cos(\beta) = \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta) + cos(\alpha+\beta)]$
  - $sin(\alpha)\, sin(\beta) = \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)]$
  - $sin(\alpha)\, cos(\beta) = \frac{1}{2}[sin(\alpha-\beta) + sin(\alpha+\beta)]$
- Formule di Addizione
  - $cos(\alpha-\beta) = cos(\alpha)\, cos(\beta) + sin(\alpha)\, sin(\beta)$
  - $cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)\, cos(\beta) - sin(\alpha)\, sin(\beta)$
  - $sin(\alpha-\beta) = sin(\alpha)\, cos(\beta) - cos(\alpha)\, sin(\beta)$
  - $sin(\alpha+\beta) = sin(\alpha)\, cos(\beta) + cos(\alpha)\, sin(\beta)$
- Formule di duplicazione
  - $sin(2\alpha) = 2\, sin(\alpha)\, cos(\alpha)$
  - $cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha)$
  - $sin^2(\alpha) = \frac{1-cos\,(2\alpha)}{2}$
  - $cos^2(\alpha) = \frac{1+cos(2\alpha)}{2}$
- Funzioni iperboliche
  - $cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
  - $sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$
  - $tanh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
- Espansioni di Taylor
  - $cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\ \forall x \in \mathbb{R}$
  - $sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\ \forall x \in \mathbb{R}$
  - $sinc(x) = \frac{sin(\pi x)}{\pi x} \approx x - \frac{(\pi x)^3}{6} + \frac{(\pi x)^5}{120} - \frac{(\pi x)^7}{5040} + \frac{(\pi x)^9}{362880} \ldots + \frac{(-1)^n (\pi x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + o((\pi x)^{2n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\pi x)^{2n+1}\ \forall x \in \mathbb{R}$

ESERCIZI

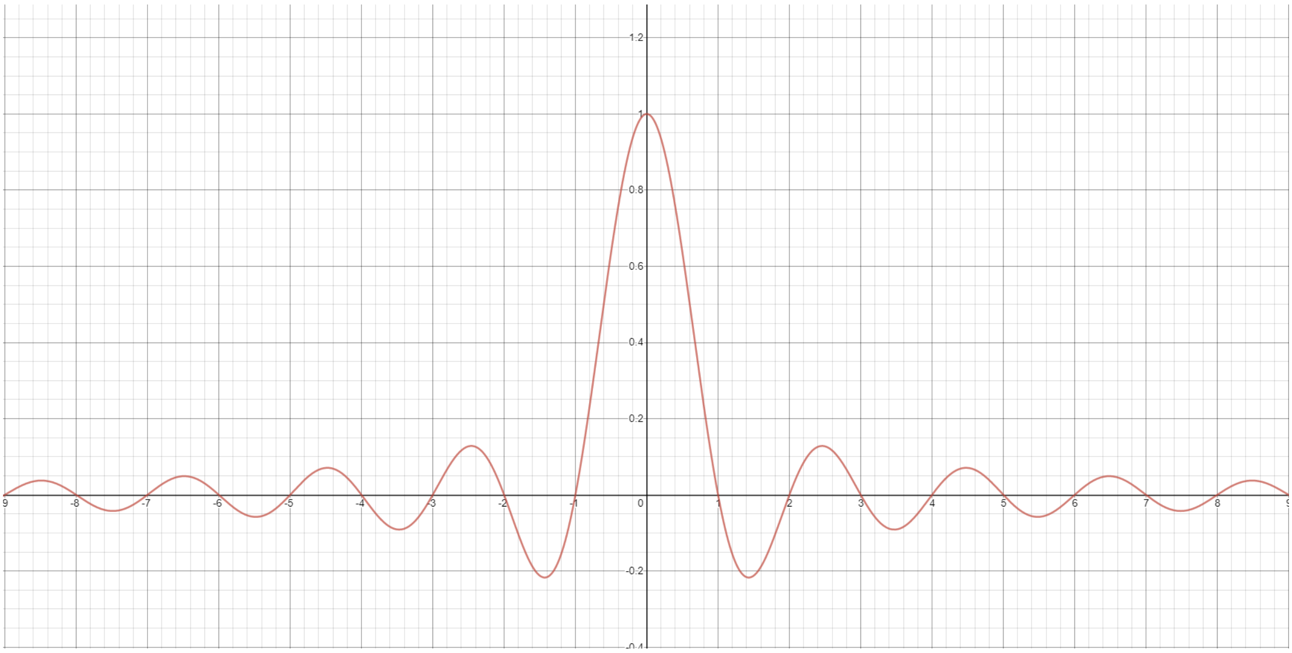
- 1.8
  - $P(A) = due\ uni = \frac{1}{36}$
  - $P(B) = almeno\ un\ uno = \frac{3}{36}$
    - $P(B|A) = 1$
    - $P(B|A) = P(A|B) * \frac{P(B)}{P(A)} \Rightarrow P(A|B) = P(B|A) * \frac{P(A)}{P(B)} = 1 * \frac{36}{11} * \frac{1}{36}$
- 2013_09_18
  - Probabilità di guasto $p_1 = 0.1\%$, $p_2 = 0.2\%$, $p_3 = 0.4\%$
    - Probabilità di guasto totale $p(guasto) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$
- 2013_07_05
  - Probabilità $(p = \frac{1}{6})$ di avere esattamente un sei $(= k)$ in un certo numero di tiri $(= N)$
    - Distribuzione binomiale $P(x) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$
    - Approssimazione di Poisson $P(x) = \frac{(Np)^k}{k!} \exp(-k)$
  - **NOTA** IL BINOMIO FATTORIALE SI CALCOLA COME nPr SULLA CALCOLATRICE
    - $\binom{N}{k} = N \cdot \boldsymbol{nPr} \cdot k$
- 2013_07_05



- 2016_07_05 e 2016_06_24
  - Sia x(t) un processo stocastico stazionario, a media nulla, potenza unitaria, bianco nella banda (5; 5) kHz.
  - Si calcoli l'autocorrelazione e la densità spettrale di potenza di $y(t) = x(t + t_0) + x(t - t_0)$
  - $y(t)$ può essere visto come il filtraggio di $x(t)$ tramite un $filtro\ LTI$
    - $Y(f) = H(f)X(f)\ con\ H(f) = 2\cos(2\pi f t_o)$
    - $h(t) = \delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)$
    - $S_y(f) = 4 \cdot \cos^2(2\pi f\ t_0) \cdot S_x(f) = 2(1 + \cos(4\pi f t_0)) \cdot S_x(f)$
      - $FORMULA\ DI\ DUPLICAZIONE \Rightarrow \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
    - $R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = 2R_x(\tau) + R_x(\tau - 2t_0) + R_x(\tau + 2t_0)$
- 2018_01_05
  - Sia $x(t)$ un processo bianco in banda $(-2, 2)\ kHz$ di potenza unitaria
  - Si consideri il processo $z(t) = 2 \cdot x(t) + 3 \cdot x(t - T)\ con\ T = 0.25ms$ e si calcoli autocorrelazione e densità spettrale di potenza di $z(t)$
  - $z(t)$ può essere visto come il filtraggio di $x(t)$ tramite un $filtro\ LTI$
    - $Z(f) = 2X(f) + 3X(f)e^{j2\pi fT}$
    - $H(f) = 2 + 3e^{j2\pi fT} \Rightarrow |H(f)|^2 = 13 + 12\cos(2\pi fT)$
      - $DEFINIZIONE\ DI\ MODULO\ QUADRO \Rightarrow |H(f)|^2 = H(f) \cdot H^*(f)$

- $FORMULE\ DI\ EULERO \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}$
- $S_z(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = (13 + 12\cos(2\pi fT)) \cdot \frac{1}{B_x} rect(\frac{f}{B_x})$
- $R_z(\tau) = 13R_x(\tau) + 6R_x(\tau - T) + 6R_x(\tau + T)$
  - $R_x(\tau) = sinc(B_x\tau)$
- 2017_12_22
  - Sistema di trasmissione numerico. Per calcolare la potenza devo:
    - Calcolare $SNR_c = \left(qfuncinv(P_\epsilon)\right)^2$
    - Calcolare la potenza trasmessa $P_T = \frac{SNR_c \cdot R_b}{h_0^2}\frac{N_0}{2}$
      - $R_b = velocità\ di\ trasmissione = B \cdot 2^k$
      - $h_0 = attenuazione\ messo\ trasmissivo$
      - **NB CONVERTIRE I NUMERI DA dB a NUMERI PURI**
- 2013_09_04
  - $x(t)$ processo casuale a valore medio nullo, stazionario e bianco in banda B, potenza P e sia $y(t)$ la sua derivata $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$
  - Calcolare la densità spettrale di potenza e la potenza di $y(t)$
    - $S_x(f) = S_{x0} \cdot rect\left(\frac{f}{B}\right)$
    - $Y(F)$ può essere visto come il filtraggio di $X(f)$ per un $filtro\ LTI, H(f) = j2\pi f$ (proprietà di derivazione nel dominio delle frequenze)
      - $S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2 = S_x(f) \cdot 4\pi^2 f^2$
      - $P_y = \int_{-B}^{+B} S_y\,(f)df = \frac{\frac{S_{x0}}{2B}4\pi^2 2}{3}B^3$
  - Calcolare il cross-spettro e la cross-correlazione
    - $S_{xy}(f) = S_x(f)H^*(f)$
    - $r_{xy}(\tau) = r_x(\tau) * h(t) = \frac{d}{dt}r_x(\tau) = \frac{d}{dt}\left(P_x \cdot sinc(Bt)\right) = \frac{d}{dt}\left(P_x \cdot \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt}\right) =$
    - $= P_x \frac{\pi Bt \cdot \cos(\pi Bt) - \sin(\pi Bt)}{\pi B t^2}$
    - OPPURE, per linearità $r_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = E\left[x(t)\frac{d}{dt}x(t+\tau)\right]$
    - $= \frac{d}{dt}E[x(t)x(t+\tau)] = \frac{d}{dt}r_x(\tau)$

Grafico del Sinc (normalizzato)



- $sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$
- $Assume\ valore\ nullo\ per\ X\ interi$
    - $sinc(\alpha x) = 0\ \forall\ x = \frac{1}{\alpha}$
- $sinc(0) = 1$
- $n \in \mathbb{N}, sinc(n) = \begin{cases} \delta(n)\ per\ n = 0 \\ 0\ per\ n \neq 0 \end{cases}$ con $\delta(n)$ delta di Kronecker
- $Approssimabile\ a\ 0\ dopo\ circa\ 3\ o\ 4\ code$