Criterio di Nyquist

Permette di studiare la stabilità senza il calcolo esplicito degli autovalori (e soprattutto senza ricorrere a Routh)

es $L = \frac{100}{(s+1)^3}$

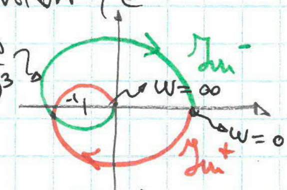


Diagramma di Nyquist: rappresentazione $G(jw)$ per $-\infty \leq w \leq +\infty$

In pratica disegno il diagramma polare anche per il ~~semirett~~ semiasse $\Im m^-$.

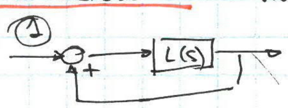
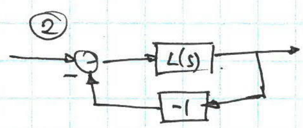
Basta tracciare il complesso coniugato del diagramma polare $\Im m^+$. Ciò viene fatto con l'invertire (specchiare) il diagramma polare rispetto all'asse x

Il criterio di Nyquist: Hp: in presenza di sis retroazionati negativamente

p = n° di poli instabili di $L(s)$ $\quad$ n = n° di giri del diagramma di Nyquist attorno al pto -1 contati positivi se in senso antiorario. (+)

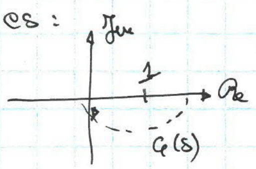
Abbiamo una condiz necessaria e suff di AS del sis retroazionato: $n = p$ con n ben definito

Estensione 1: retroazione positiva

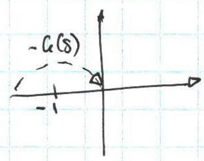
①  Posso trasformarlo con ②  ~~Essi sono schemi a blocchi equivalenti per la stabilità~~

Per la stabilità ② è equivalente a ③ 

es:



Il diagramma polare di $-G$ è



parte reale e $\Im m$ vengono scambiate.

Quindi il n° di giri che $-G(s)$ compie attorno a -1 equivale al n° di giri che G compie attorno a 1.

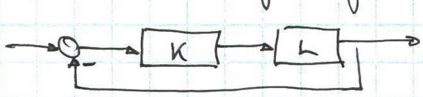
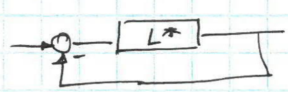
Quindi per la retroazione positiva; dati:

Γ diagramma di Nyquist di G

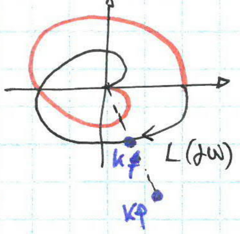
N è il n° di giri antiorari attorno a 1 $\;\rightarrow\;$ AS $\iff$ $\begin{cases} n \text{ ben definiti} \\ n = p \end{cases}$

P è il n° di poli di G con $\Re > 0$

Estensione 2: "guadagno ad anello"

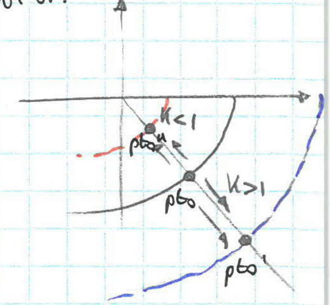
 =  con $L^* = K \cdot L$ → posso applicare ancora Nyquist.

es

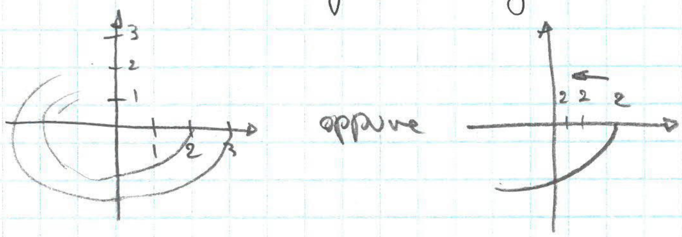


Se $K > 1$ sposto esternamente il pto del diagramma lungo il raggio
in pratica "gonfio" il diagramma

Se $0 < K < 1$ "restringo" il diagramma



Posso moltiplicare per K in maniera grafica senza cambiare gli assi, oppure posso tenere fisso il disegno e "immaginare" di cambiare la scala degli assi.



Il mio interesse è vedere cosa succede attorno a -1

Riformulo il criterio

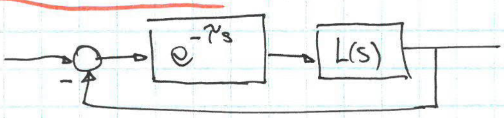
$0<K<1$: Γ diagramma di Nyquist di $L(s)$ (NB: non è L^*)

N il n° di giri antiorari di Γ intorno a $-\frac{1}{K}$ (dovuto al rigonfiamento)

P il n° di poli con $Re>0$ di $L(s)$

Allora AS $\Leftrightarrow \begin{cases} N \text{ ben definito} \\ N=P \end{cases}$

Estensione 3: "ritardo ad anello"

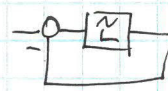


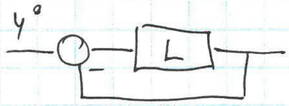
- Γ diag di $e^{-\tau s}L(s)$
- n n° di giri di Γ attorno -1
- p n° di poli di $L(s)$ con $Re>0$

$\rightarrow$ STABILITÀ I/O $\Leftrightarrow \begin{cases} n \text{ def} \\ n=p \end{cases}$

Stabilità robusta

Modello nominale: la migliore descrizione della realtà che ho deciso di usare $\rightarrow$





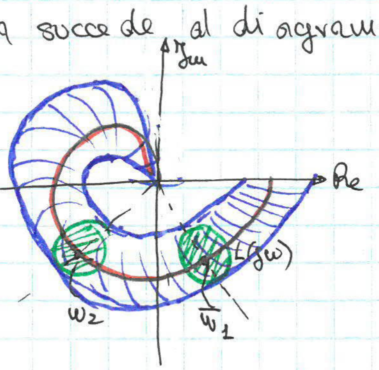
Hp: il sis nominale è AS in anello chiuso

Obiettivo: dare degli indicatori che quantificano quanto posso aspettarmi che la AS valga anche con il sis vero.

$$\underbrace{\tilde{L}(s)}_{\text{sis vero}} = \underbrace{\bar{L}(s)}_{\text{noto (sis nominale)}} + \underbrace{\delta L(s)}_{\text{non è noto}}$$

assumo che $|\delta L(s)| \le \Delta(s)$ quindi il suo modulo è limitato entro un valore limite $\Delta(s)$ (può variare in funzione di s vedi alla fine in blu che si rimpicciolisce)

Cosa succede al diagramma polare? Il cerchio verde attorno a $\bar{\omega}_1$ è quello che mi indica la "variazione" del diagramma attorno ad un valore ω_1 fissato.
↑ raggio cerchio ↑ incertezza



Posso fare lo stesso discorso per tutti gli ω e mi ritrovo una regione dello spazio nel piano complesso

Passo da 1 curva sola ad una famiglia di curve.

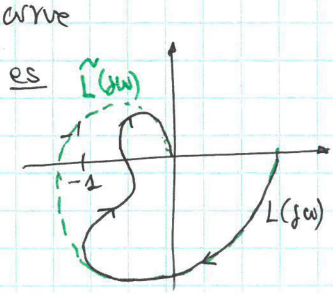
Se voglio essere sicuro che il sis sia robustamente stabile

Il criterio deve essere soddisfatto da tutte le curve

Consideriamo il caso in cui:
- modello nominale AS
- $L(s)$ non ha poli con $Re>0$
- $\tilde{L}(s)$ non ha poli con $Re>0$ $\forall \delta L$

$\Rightarrow$ AS $\Leftrightarrow n=0$

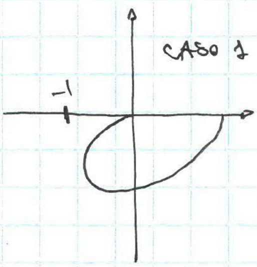
es

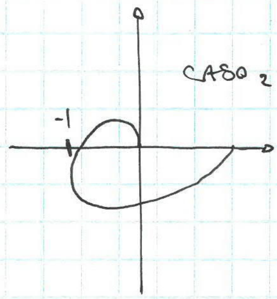


Se faccio variare $\tilde{L}(s)$ a tal punto da "scavalcare" -1, allora abbiamo l'instabilità.

Più ci avviciniamo annualmente a -1, più è probabile che l'incertezza faccia scavalcare $\tilde{L}(s)$ $L(s)$

Vediamo dei casi:

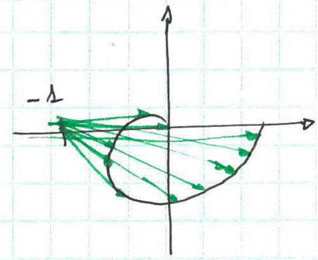




Il caso 1 è meglio del caso 2 perché ci vuole incertezza maggiore per destabilizzare il sistema

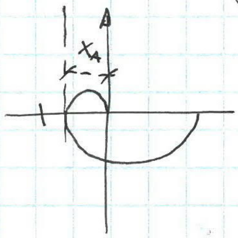
Il caso 1 è più robusto

Indice di robustezza 1) Margine di stabilità vettoriale



$d = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)|$ = minima distanza tra -1 e $L(j\omega)$

Indice 2) Margine di guadagno



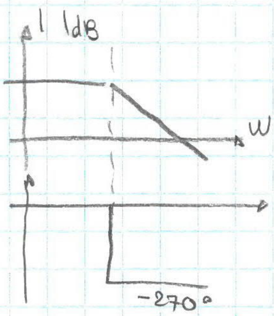
$K_m = \dfrac{1}{x_A}$ $\quad \omega_\pi : \measuredangle [L(j\omega_\pi)] = -180°$

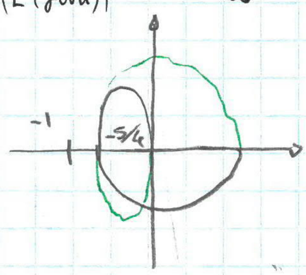
$x_A = |L(j\omega_\pi)|$ $\quad K_m = \dfrac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$

es

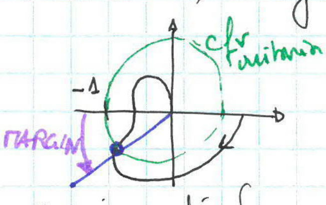
$L(s) = \dfrac{10}{(1+s)^3}$ $\quad \measuredangle L(j\omega_\pi) = -180° = -3\,\text{arctg}(\omega_\pi)$ $\quad \omega_\pi = \text{tg}(60°) = \underline{\sqrt{3}\ \text{rad/s}}$

$K_m = \dfrac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = \dfrac{(\sqrt{1+3})^3}{10} = \dfrac{4}{5} < 1$





Indice 3) Margine di fase



$\omega_c : |L(j\omega_c)| = 1$

$\varphi_c : \measuredangle [L(j\omega_c)]$ $\quad \varphi_m = 180° - |\varphi_c|$

margine di fase: rappresenta robustezza ai ritardi in quello $\tilde{L}(s) = e^{-s\tilde{\tau}} L(s)$

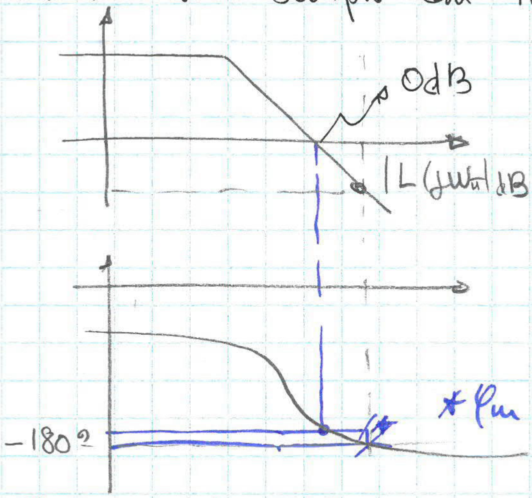
es $\quad L(s) = \dfrac{10}{(1+s)(1+2s)}$ $\quad |L(j\omega)| = 1 = \dfrac{10}{(1+j\omega)(2j\omega+1)}$ $\quad \sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+4\omega^2} = 10$

$4\omega^4 + 5\omega^2 + 1 = 100$ $\quad \omega_c \simeq 2{,}09$ $\quad \tilde{\omega} = \omega^2$ $\quad \varphi_c = -\text{arctg}(\omega_c) - \text{arctg}(2\omega_c) = -64{,}5° - 76{,}6° =$

$= -141{,}11°$

$\varphi_m = 180° - 141{,}1° = 38{,}9° > 0$

Vediamo un esempio con il diag Bode

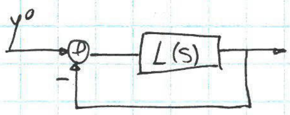


Vedo graficamente $K_m: -|L(j\omega_a)|_{dB} > 1$

il margine di fase è la sottrazione di 180 e della fase con guadagno 0dB

Criterio di Bode

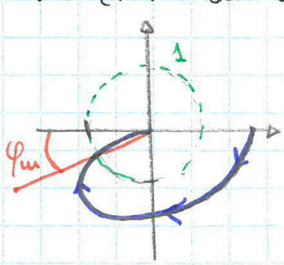
È spesso molto difficile tracciare un diagramma di Nyquist. Perciò ci affidiamo ad un criterio che sfrutta i diagrammi di Bode



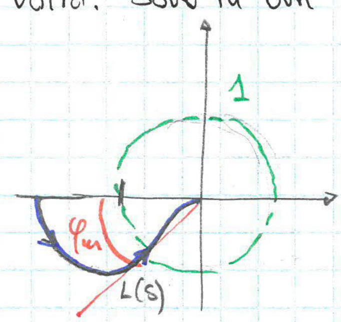
Condizione di applicabilità
1) $P=0$
2) Il diagramma di Bode di $L(s)$ tagli l'asse a 0dB una sola volta, e questo taglio avviene dall'alto verso il basso (o con pendenza negativa, es $-20dB/dec$)

Allora possiamo dire che AS in anello chiuso $\Longleftrightarrow \begin{cases} \mu > 0 \text{ (guadagno generalizzato di } L(s)) \\ \varphi_m > 0° \end{cases}$

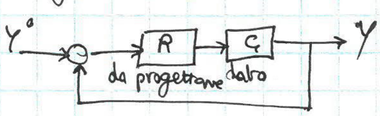
DIM: sappiamo per Nyquist che $p=0 \overset{\text{se e solo se}}{\Longleftrightarrow} N=0$. Il taglio unico, tradotto nel diagramma polare, vuol dire che io entro nella cfr di modulo 1 una sola volta. Sono in una condizione del tipo:



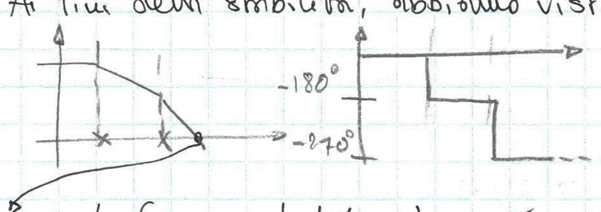
Ho bisogno di $\mu>0$ perché potrei ritrovarmi nella condizione a destra:
Se chiudo il diagramma, ho giri attorno a -1 e ciò non va bene per il crit. Bode.



Il nostro obiettivo è progettare il sis di controllo, in cui R è il blocco da progettare



Ai fini della stabilità, abbiamo visto che ci interessa $L(s) = R \cdot G$



Vediamo un solo taglio e la fase probabilmente sarà $> 180°$ quindi $\varphi_m > 0$ e $\mu > 0$ perché parto con fase 0. Perciò so che questo esempio in anello chiuso è AS. Però non è molto robusto, siamo vicino all'instabilità.

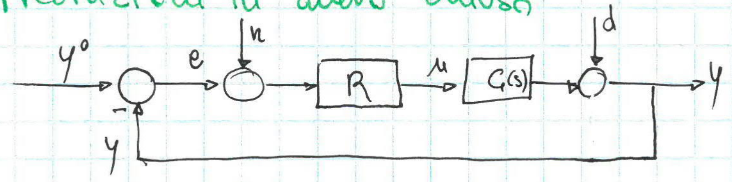
Per migliorare φ_m posso "traslare" il grafico verso il basso, diminuendo il guadagno.
Oppure posso mettere uno zero per guadagnare 20 dB/dec e recuperare 90°
La diminuzione del guadagno nel diagramma polare equivale allo "sgonfiamento" della caratteristica. Con lo zero è più difficile.
I diagrammi di Bode sono più facili e precisi da tracciare dei diagrammi polari.
Corollario sul criterio di Bode: **Criterio di Bode per sis a fase minima.**

- $\mu > 0$ è verificato automaticamente
- forte legame tra bode modulo e fasi

AS. stabile in anello chiuso $\Leftarrow$ Se il diagramma di Bode del modulo taglia l'asse 0dB una sola volta con pendenza -20 dB/dec

Infatti per avere il taglio -20 dB/dec, prima della ω_{0dB} ho un polo in più di tutti gli altri zeri. Questi poli e zeri sono tutti con $Re \leq 0$ perché siamo in un sis a fase minima. Il polo residuo fornirà sfasamento di 90° quindi abbiamo automaticamente un buon margine di fase

Prestazioni in anello chiuso



Il regolatore R è affetto all'ingresso da disturbo n che si somma all'errore e
Abbiamo un ulteriore disturbo. n = rumore di misura, d = disturbo → concettualmente sono molto diversi. Matematicamente sono due ulteriori ingressi

n è "un'illusione" di misura, legato al sensore che può avere un offset di misura, non reale
Il disturbo "d" invece è una condizione reale che agisce sul sistema nella realtà
(es: n = offset del termometro che misura 18° invece di 20°, d = finestra aperta $\Rightarrow$ si passa realmente da 18° a 20°)

Abbiamo 3 ingressi (y°, n, d) e 3 uscite (y, e, u)
Andiamo a calcolare le FdT rispetto ai vari ingressi e varie uscite (prendo due pti dello schema a blocchi)

$S(s) = \frac{1}{1+RG} = \frac{1}{1+L}$ Rispetto a $d \to y$
$S(s) = \frac{1}{1+L}$ rispetto a $y^\circ \to e$
$S(s) = \frac{1}{1+L}$ rispetto a $-d \to e$

$\frac{1}{1+L}$ è detta "funzione di sensitività"

Da $\left.\begin{array}{l} y^\circ \to y \\ -n \to e \\ n \to y \end{array}\right\} F(s) = \frac{RG}{1+RG} = \frac{L}{1+L}$ ⇝ funzione di sensitività complementare

Ed infine $\left.\begin{array}{l} y^\circ \to u \\ n \to u \\ -d \to u \end{array}\right\} Q(s) = \dfrac{R}{1+RG} = \dfrac{R}{1+L}$ → "funzione di sensitività del controllo"

Vediamo: $S(s) + F(s) = \dfrac{1}{1+L} + \dfrac{L}{1+L} = 1$ → S e F sono complementari perché si sommano a 1

L'errore risulta essere (per la sovrapposizione degli effetti)

$E(s) = S(s) \cdot Y^\circ(s) - S(s) \cdot D(s) - F(s) \cdot N(s)$, → ~~piccolo~~ ~~errore~~ si vuole avere un piccolo errore →

$\| E(s) \| \ll 1$ considerando y° e n qualsiasi per fare piccolo E, ~~ma~~ posso fare piccoli S e F, ma $S+F=$ ~~1~~ perché sono complementari. Devo bilanciare S e F per avere un compromesso. S descrive l'effetto della variazione di un disturbo, mentre F mi dice quello della misura.

Se $S+F=1 \iff S(j\omega) + F(j\omega) = 1 \quad \forall \omega$

Quindi $\forall$ frequenza, devo bilanciare le due sensibilità, in base alle specifiche di progetto

Precisione statica $(t \to \infty)$

Staticamente, S e F sono di mio interesse. Q non è molto utile.

Staticamente il valore di u è determinato da G e non da R, perciò studiamo le altre funzioni.

1) Studio S(s) $\qquad y^\circ = \dfrac{A}{s^r} \qquad E(s) = S(s) \cdot \dfrac{A}{s^r} = \dfrac{1}{1+L(s)} \cdot \dfrac{A}{s^r}$

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s\, E(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{1+L(s)} \frac{A}{s^r}$$ in cui $L(s) = \dfrac{\mu}{s^g} \underbrace{\dfrac{\prod(1+sT_i)}{\prod(1+sT_i)} \cdot \dfrac{\prod\left(\frac{s^2}{\alpha_i^2} + \frac{2\beta_i s}{\alpha_i} + 1\right)}{\prod\left(\frac{s^2}{\omega_{n_i}^2} + \frac{2\xi_i s}{\omega_{n_i}} + 1\right)}}_{\text{convergono a 1 per } s \to 0}$

Perciò semplifico e ottengo $$e_\infty = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1+\frac{\mu}{s^g}} \cdot \frac{A}{s^{r-1}}$$

esempi

$r=1 \quad y^\circ = A\,\text{sca}(t) \quad e_\infty = \lim_{s \to 0} \dfrac{s^g}{s^g+\mu} \cdot A \begin{cases} g=0 & e_\infty = \dfrac{A}{1+\mu} \\ g \geq 1 & e_\infty = 0 \\ g<0 & e_\infty = A \end{cases}$

$r=2 \quad y^\circ = A\,\text{rampa}(t) \quad e_\infty = \lim_{s \to 0} \dfrac{s^g}{s^g+\mu} \cdot \dfrac{A}{s^g} \begin{cases} g<1 & e_\infty = \infty \\ g=1 & e_\infty = A/\mu \to \text{integratore} \\ g \geq 2 & e_\infty = 0 \to \text{doppio int} \end{cases}$

S(s) a regime è tc per cui:

1) Il comportamento di e_∞ dipende solo da μ, g, A

2) per avere $e_\infty \to 0$ è necessario che $g \geq r$

Oss: con lo scalino, possiamo mettere un integratore per avere errore 0.

Ci aspettiamo però complicazioni della $F(s)$. Sarebbe meglio non integrare, ottenendo

$g=0 \rightarrow e_\infty = \frac{A}{1+\mu}$ riduciamo l'errore con μ abbastanza grande invece di un int.

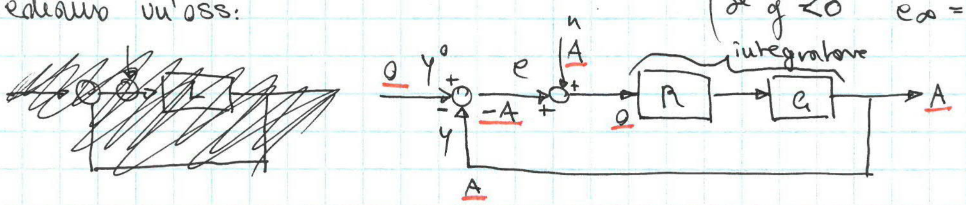
2) Studio $F(s)$ $(n \rightarrow e)$ $N(s) = \frac{A}{s^r}$ $E(s) = \frac{L}{1+L} \cdot \frac{A}{s^r}$

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{\mu / s^g}{1+ \mu / s^g} \cdot \frac{A}{s^r}$$

es

$r=1$ $n(t) = A\,sca(t)$ $e_\infty = \lim_{s\to 0} \frac{A\mu}{\mu + s^g}$ $\begin{cases} \text{se } g=0 & e_\infty = A\mu / \mu+1 \\ \text{se } g \geq 1 & e_\infty = A \\ \text{se } g<0 & e_\infty = 0 \end{cases}$ → caso opposto rispetto a prima, abbiamo la complementarietà tra $S(s)$ e $F(s)$

Vediamo un'oss:



Vedendo a transitorio esaurito abbiamo:

$g=1 \rightarrow$ integratore - AS stab. in anello chiuso → tutti i segnali perciò convergono ad un valore

Ma abbiamo un integratore puro, se voglio l'uscita stabile, l'ingresso dovrà per forza essere zero (se fosse una costante l'usita sarebbe ~~[illegible]~~ la costante integrata quindi diverge)

Per avere zero devo avere $\underline{y=A}$, quindi $n=A$ che sommato ed entrante su R, diventa zero. Il rumore di misura viene scambiato come riferimento. Non siamo infatti in grado di separare $\forall$ frequenza il rumore dal riferimento.

Se il progetto è fatto bene, il rumore risultante sarà senza componenti a bassa freq.

Oss: l'integratore è dinamico, devo tenere conto della storia passata, se non fosse così potrei avere delle transizioni in atto. Infatti si sta studiando un equilibrio dovuto per effetti precedenti, ecco perché y vale "magicamente" A, perché se non fosse così non saremmo più in situazione di equilibrio.

I diversi casi possono essere riassunti in delle tabelle:

e_∞		g = 0	1	2
$y^\circ(s)$	$\frac{A}{s}$	$\frac{A}{1+\mu}$	0	0
	$\frac{A}{s^2}$	∞	$\frac{A}{\mu}$	0
	$\frac{A}{s^3}$	∞	∞	$\frac{A}{\mu}$

Oss: nella realtà gli ingressi a parabola non vengono mai utilizzati.

e_∞		g = 0	1	2
$N(s)$	$\frac{A}{s}$	$\frac{A\cdot\mu}{\mu+1}$	A	A
	$\frac{A}{s^2}$	∞	∞	∞
	$\frac{A}{s^3}$	∞	∞	∞

Oss: gli ∞ sono dovuti a dei derivatori puri, perché essi in anello ignorano sì l'errore di misura ma ignorano anche i riferimenti stessi, annullandoli.

Ecco fatto tutto il necessario per avere la precisione statica date alcune condizioni o specifiche di progetto. Oss: per progettare il sis di controllo ho bisogno di indicazioni su cosa aspettarmi come ingresso

Precisione dinamica

Mi interessano le risposte in frequenza delle sensibilità $S(j\omega)$, $F(j\omega)$, $Q(j\omega)$

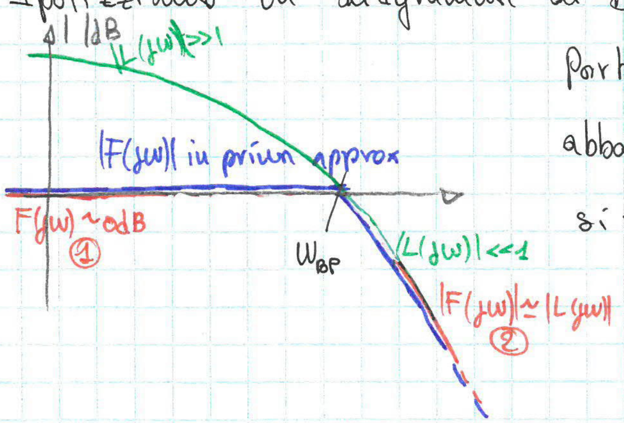
Funzione di sensibilità complementare

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \begin{cases} y^\circ \to y \\ -n \to y \\ -n \to e \end{cases} \qquad F(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)}$$ Studiamone il modulo

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \simeq \begin{cases} ① \text{ se } |L(j\omega)| \ll 1 \quad |F(j\omega)| = |L(j\omega)| \quad (|1+L(j\omega)| \simeq 1) \\ ② \text{ se } |L(j\omega)| \gg 1 \quad |F(j\omega)| = 1 \quad (|1+L(j\omega)| \simeq |L(j\omega)|) \end{cases}$$

approssimaz a poli dominanti

Ipotizziamo un diagramma di Bode del modulo di $L(j\omega)$ e di $F(j\omega)$:



Portando agli estremi ① e ②, mi posso fare un'idea abbastanza precisa sulla forma di $F(j\omega)$ che, da come si vede, ha la forma di un passa-basso (tratto blu)

ω_{BP}: frequenza di "Banda Passante"

Si nota che $\omega_{BP} = \omega_c$ perché $L(s)$ taglia l'asse 0dB

Vogliamo analizzare cosa succede nell'intorno di ω_{BP}

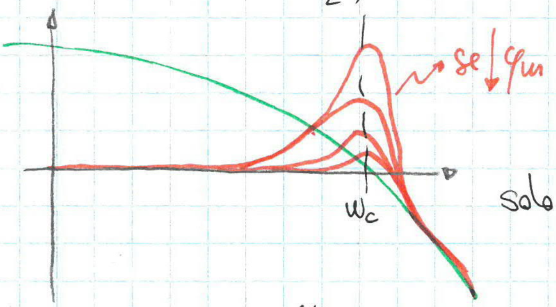
$$|F(j\omega_c)| = \frac{|L(j\omega_c)|}{|1+L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1+1\cdot e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{|1+\cos\varphi_c + j\sin\varphi_c|} = \frac{1}{(1+\cos\varphi_c^2+\sin^2\varphi_c)^{1/2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2+2\cos\varphi_c}} =$$ dalla trigonometria $\cos(\alpha) = -\cos(180°-\alpha)$ $\cos(2\alpha) = 1-2\sin^2\alpha$

$\cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ so che $\varphi_m = 180 - |\varphi_c|$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\varphi_m)}}$$ solo nel caso in cui $\varphi_m > 0$ (secondo il criterio di Bode, non ha senso analizzare le prestazioni per sis inst ($\varphi_m < 0$))

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1-1+2\sin^2\frac{\varphi_m}{2})}} \qquad |F(j\omega_c)| = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)}$$ → man mano che φ_m diminuisce il modulo si modifica così:



In prima approx avevamo un passa basso, ora otteniamo in seconda approx una risonanza dettata solo dal margine di fase (invece di 1 polo ho due poli)

Considero un $\tilde{F}(j\omega) = \dfrac{\omega_c^2}{s^2+2\xi\omega_c s+\omega_c^2}$ cerco un ξ tale per cui $|\tilde{F}(j\omega_c)| = |F(j\omega_c)|$

Cerco una FdT del secondo ordine che approx bene la funzione di sensibilità complementare vicino al pto ω_c.

$$|\tilde{F}(j\omega_c)| = \left|\frac{\omega_c^2}{2\xi\omega_c^2}\right| = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2\sin\frac{\varphi_m}{2}} \longrightarrow \xi = \frac{\varphi_m}{2}\boxed{\frac{\pi}{180°}}$$ → conversione da gradi a rad (φ_m è di solito espresso in radianti)

$\xi \simeq \dfrac{\varphi_m}{100}$ → espresso in gradi

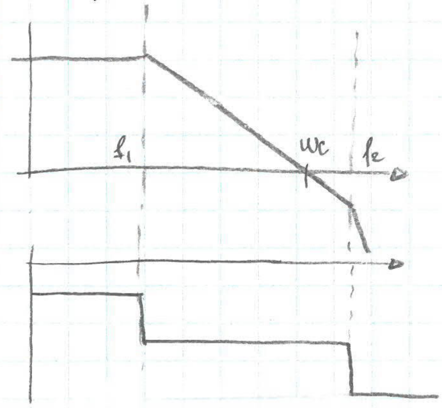
$$\tilde{F}(j\omega_c) = \frac{\omega_c^2}{(j\omega_c)^2+2\xi\omega_c\omega_c j+\omega_c^2} = \frac{\omega_c^2}{\cancel{-\omega_c^2}+\cancel{\omega_c^2}+2\xi\omega_c^2 j}$$

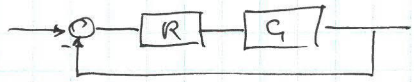
Se $\varphi_m > 75°$ la risposta allo scalino di $F(s)$ non ha oscillazioni ⇒ $T_{ASS} = 5/\omega_c$

Se $\varphi_m < 75°$ " " " " contiene oscillazioni ⇒ $T_{ASS} = 5/\xi\omega_c$

$$T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi^2}} \qquad S\% = 100 \cdot e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

esempio





Con $R=1$ abbiamo sis AS

Con $R=0,5$ abbiamo ↑stabilità ma ↓velocità

Se $\varphi_m > 75°$ $\quad T_{ASS} = \dfrac{5}{\omega_c}$

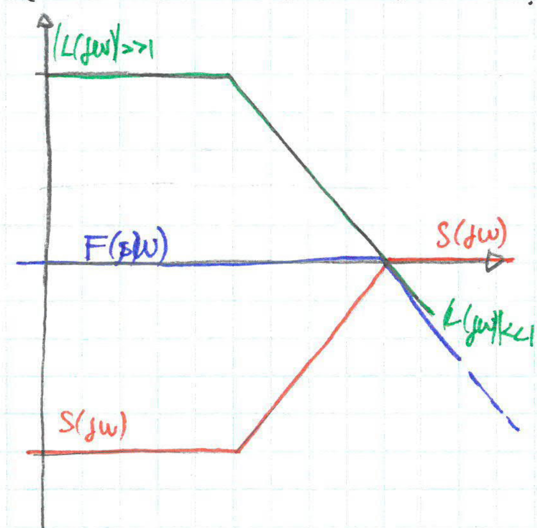
Se $\varphi_m < 75°$ $\quad T_{ASS} = \dfrac{5}{\omega_c \xi}$

Posso ↑ω_c (alzare il guadagno) per avere ↓T_{ASS}, ma se ↑ω_c troppo, rischio di ricadere $\varphi_m < 75°$ e quindi diminuire la stabilità e introduco oscillazioni.

Una modifica del sis RG ci permette di fare "stime" di cosa succede in anello chiuso.

Funzione sensitività

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1+L(j\omega)|} = \begin{cases} \dfrac{1}{|L(j\omega)|} & \text{se } |L(j\omega)| \gg 1 \\ 1 & \text{se } |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$



$S(j\omega)$ è invertito per $|L(j\omega)|$ perché in dB il reciproco corrisponde al segno negativo. Abbiamo un passa alto

Ci piace che sia passa alto perché S è legato a

$y_0 \to e$, $d \to e$, $d \to y$

Quindi minimizzo il disturbo su errore e uscita e il riferimento sull'errore.

Però vedo che la reiezione è limitata in base alla banda di L

Guardando $F(j\omega)$ ($y_0 \to y$, $n \to y$, $n \to e$), per avere un buon ~~riferi~~ inseguimento del riferimento nella banda passante, ma sono allo stesso tempo più sensibile all'errore a causa dell'influenza di n sull'uscita e l'errore.

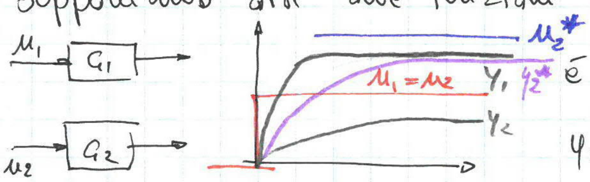
Se n ha componenti armoniche che finiscono in banda, abbiamo la riflessione di ciò direttamente in y. Se sono armoniche HF, ho più reiezione.

Funzione di sensibilità del controllo

$$Q = \frac{R}{1+RG} = \frac{R}{1+RG}\cdot\frac{G}{G} = F\cdot G^{-1} \qquad Q(j\omega) \simeq \begin{cases} 1/|G(j\omega)| & \omega \ll \omega_c \\ |R(j\omega)| & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

$(y^o \to u,\ n \to u,\ -d \to u)$

Supponiamo ora due funzioni G, con guadagni diversi μ_1 e μ_2



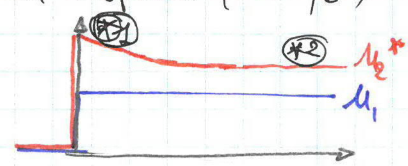
è abbastanza ragionevole dire che y_2 è più lento di y_1.

Ora tengo fisso y_1 e cerco di far muovere y_2 come y_1 (voglio accelerarlo)

Bisognerà quindi cambiare l'ingresso. Ho bisogno quindi di u_2^* più ampio di u_1

y_2 verrà quindi scalato verso l'alto, ma non sto raggiungendo la stessa risposta (vedi y_2^*)

Dovrò applicare un ingresso non più sotto forma di scalino



Se mi riconduco ad un caso in cui le risposte sono simili,

posso fare delle analisi. es: l'auto che, per avere le stesse prestazioni dell'auto 1, dovrà consumare più carburante *2 all'infinito, ma dovrà immettere ancora più carburante alla partenza *1.

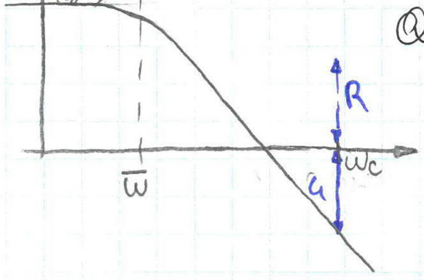
Sapendo che G è fisso, il controllore deve compensare ciò che vuole G, quindi l'impatto della sua azione di controllo è situato al "consumo" di ingresso.

Con un u_2^* ho un overboost rispetto a u_2, quindi devo avere per forza un costo.

(Oss: rallentando u_2 posso decidere di rallentare ulteriormente il sis → meno consumi)

es: accelerazione ottimale di un braccio meccanico. Se tiro un impulso iniziale per far muovere velocemente il braccio, posso fare danni meccanici o la coppia che impongo non può essere soddisfatta dal motore → azione in risposta più lenta

Il mio obiettivo è accelerare la risposta di G, quindi progetto R in modo che



venga spostata $\bar{\omega}$ fino a raggiungere una ω_c voluta.

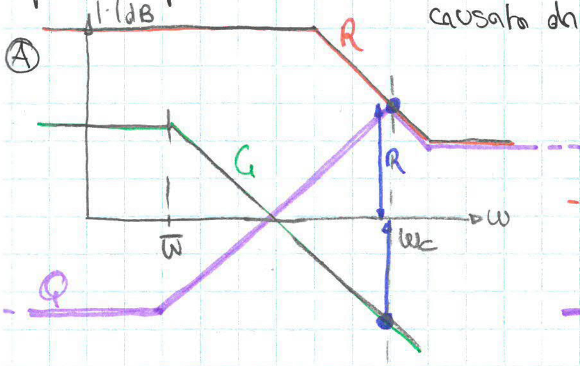
Quanto dovrà valere R per avere $\bar{\omega} = \omega_{CRIT}$?

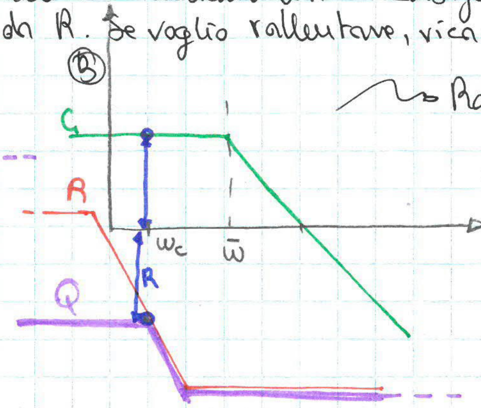
$L = RG$ quindi ho bisogno che per $\omega = \omega_c$ ho bisogno che R sia l'opposto di G per compensare la caratteristica

Posso quindi amplificare senza poli o zeri così da traslare la caratteristica.

Nella bassa frequenza, se ho un guadagno maggiore miglioro la sensibilità complementare

posso ipotizzare un R: caso (A) abbiamo un Q conseguente all'accelerazione della risposta causato da R. Se voglio rallentare, ricado in (B)





→ Raggiungo un'ω_c più lenta rispetto al caso (A)

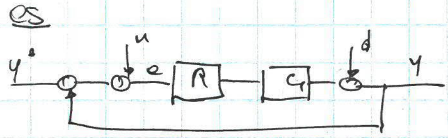
Per HF: nel caso (A) Q amplifica le HF → eccitazione maggiore della variabile controllo u

" " (B) Q filtra ulteriormente le HF → eccitaz. minore per u

(oss caso (A): ho addirittura un picco di eccitazione per le HF oltre che amplif. normale)

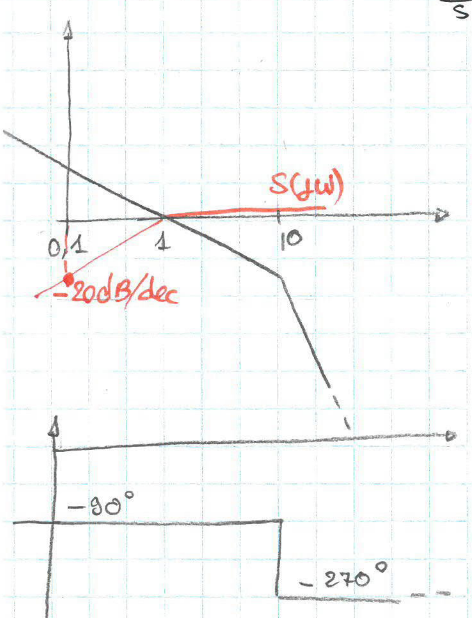
Generalmente: se voglio qualcosa di performante lo progetto instabile ad anello aperto e lo stabilizzo in retroazione (es: aereo militare da caccia, amplificatore con buona stabilità (vedi FdE))

es



$R = \frac{1}{s}$ $\quad G = \frac{1}{(0{,}1s+1)^2}$ $\quad y^\circ = 4\,\text{ramp}(t)$ $\quad u = 0{,}1\,\text{sca}(t)$

$d = 2\sin(\bar{\omega}t)$ $\quad \bar{\omega} = 0{,}1\ \frac{rad}{s}$ $\quad L(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(0{,}1s+1)^2}$ → Bode:



$\mu = 1 \quad g = 1 \quad$ poli 10 rad/s (2 poli stabili)

1) Calcolo errore a regime

$$E_{y^\circ} = S(s)\cdot\frac{4}{s^2} \quad \text{in cui } S(s) = \frac{1}{1+L} = \frac{1}{1+\frac{1}{s(0{,}1s+1)^2}} =$$

$$= \frac{s(0{,}1s+1)^2}{s(0{,}1s+1)^2+1} = \frac{s(0{,}1s+1)^2}{0{,}01s^2+0{,}2s^2+s+1}$$

$$E_{y^\circ} = \frac{\cancel{s}(0{,}1s+1)^2\cdot 4}{s^{\cancel{2}}(0{,}01s^3+0{,}2s^2+s+1)}$$

$$e_{y^\circ\infty} = \lim_{s\to 0} E_{y^\circ}\cdot s = \frac{4(0{,}1s+1)^2}{0{,}01s^3+0{,}2s^2+s+1} = 4$$

$$E_u = F(s)\cdot\frac{0{,}1}{s} = \underbrace{\frac{1}{s(0{,}1s+1)^2+1}}_{F(s)}\cdot\frac{0{,}1}{s} \qquad e_{u\infty} = |0{,}1|$$

$E_d = S(s)\cdot D(s)$ $\quad e_d(t) \to 2|S(j\bar{\omega})|\sin(\bar{\omega}t + \angle[S(j\bar{\omega})])$

① $S(j\omega) = \frac{1}{|1+L(j\omega)|} \underset{\bar{\omega}}{\simeq} 0{,}1$ guardando il diagramma di bode (−20 dB)] → prima approx

② $S(j\omega) = \frac{1}{|1+10|} \simeq \frac{1}{11}$ → seconda approx

③ $S(j\omega) = \frac{1}{|1+L(j\omega)|}$ → calcolo il modulo analiticamente → $\frac{1}{\sqrt{101}}$

Progetto di un sistema di controllo

Sintesi del regolatore

Problema) Dati: $G(s)$ e andamenti presenti: y°, d, n

→ Si vuole progettare R tc in anello chiuso valgano determinate proprietà (che ~~sono~~ corrispondono alle prestazioni).

Specifiche (Requisiti)

1) Stabilità in anello chiuso in condizioni nominali

2) Stabilità robusta (in condizioni perturbate): Criterio di Nyquist; Criterio di Bode → $\varphi_m > \bar{\varphi}$, $K_m > \bar{K}$ → determinati valori

Assumo che il crit. Bode sia applicabile. Le sue condizioni sono: $p=0$, $L(s)$ taglia OdB una sola volta dall'alto verso il basso.

→ Se $G(s)$ ha un polo instabile non posso applicare il Crit. Bode perché anche $L(s)$ ha un polo instabile.

3) Precisione statica $e_{ss} = 0$ oppure $e_{ss} < E_{max}$ → per valutarli dobbiamo necessariamente conoscere y°, n, d

4) Precisione dinamica o inseguimento del riferimento ("quanto bene seguo y°") ~~$y(t)$~~ $\varphi(t)$ in maniera informale $y(t) \sim y^\circ(t)$, formalmente verifichiamo: T_{ASS}, oscillazioni, $S\%$

5) Attenuazione del disturbo $\frac{Y}{d} = S = \frac{1}{1+L}$ si considera d come disturbo di ampiezza D e pulsazione ω con $\omega < \omega_d$ → $d(t) = D\sin(\omega t)$ e si richiede che l'effetto di d su y sia attenuato di un fattore

6) Attenuazione del rumore $\frac{Y}{n} = \frac{L}{1+L} = F$ consideriamo $n = N\sin(\omega t)$ e che $\omega > \omega_n$ (il rumore va ad agire a HF e il disturbo agisce a LF)

si richiede che l'effetto di n su y sia attenuato di un fattore

7) Moderazione della variabile di controllo $Q = \frac{R}{1+L}$ vorrei che $|u|$ (che è l'azione di controllo) sia minore di un valore a partire da ω_{max} (non voglio avere una variabile di controllo con componenti con armoniche HF troppo elevate: causano vibrazioni usurando il sis o possono avere uno scadente modello e quindi uno scadente sis controllo)

8) R realizzabile: poli ≥ zeri (che R non sia improprio).

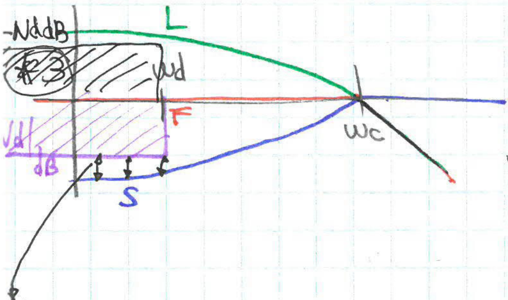
Il 1° e l'ultimo requisito devono essere sempre considerati anche se non sono spesso citati dal testo.

Possiamo cercare di rappresent. i requisiti come vincoli sul diagramma di Bode.

Una rappresentabilità grafica buona è per i requisiti 4,5,6,7.

es: precisione dinamica: $\left\{\begin{array}{l}T_{ass} \\ \text{oscillaz} \\ S\%\end{array}\right\} \rightarrow$ (*1) legati alla pulsazione + poli dominanti in anello chiuso e dello smorzamento che introducono (*2)

traduciamo (*1) in $\omega = \omega_c$ (pulsaz. critica) e (*2) in $\xi \simeq \frac{\varphi_m\,[\text{gradi}]}{100}$. Vediamo



Vogliamo $\omega_c > \bar{\omega}$

e $\varphi_m > \bar{\varphi}$ (a cui è legato ξ)

Vogliamo anche $\omega < \omega_d$ (per il disturbo) $\Longrightarrow |S(j\omega)| < N_d$ per $\omega < \omega_d$

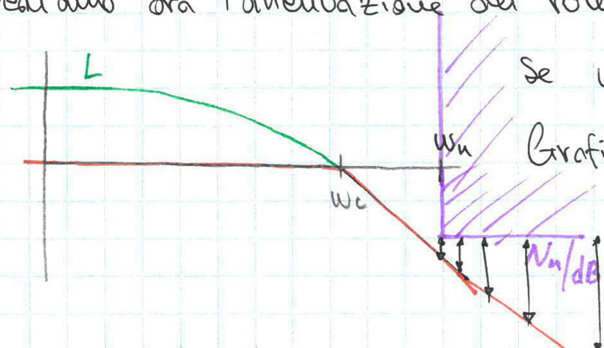
in cui $S = \frac{1}{1+L}$ e $F = \frac{L}{1+L}$

Voglio che S passi sotto un rettangolo con base da $-\infty$ a ω_d e altezza $N_d|_{dB}$

Oss: se $\omega_d > \omega_c$ non esisterebbe un modo di soddisfare questo requisito.

(*3) Ciò si traduce che L stia sopra un rettangolo (situazione analoga specchiata)

Vediamo ora l'attenuazione del rumore ($\omega > \omega_n$)

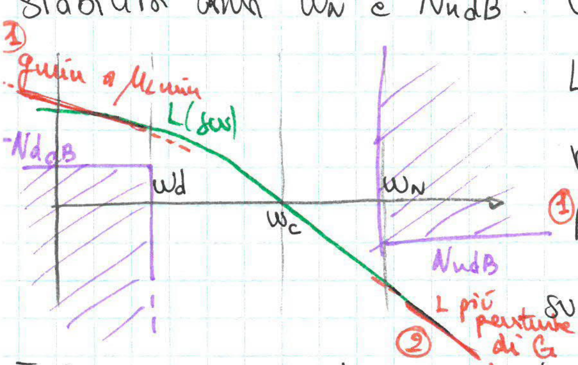


Se $\omega_n < \omega_c$ non posso soddisfare la richiesta (vedi grafico)

Graficamente per $\omega_n > \omega_c$ abbiamo che L stia sotto il solito rettangolo di altezza $N_n|_{dB}$ incentrato su ω_n

NB: $N_{n\,dB}$ e $N_{d\,dB}$ sono $< 0\,dB$ (ovviamente)

Riconducendo L a F, vediamo che L non può passare attraverso la regione stabilita dalla ω_n e $N_{n\,dB}$. Unendo disturbo e rumore su L:



$L(j\omega)$ deve passare nel vuoto delimitato dalle regioni.

(1) Per la precisione statica abbiamo un'influenza su L attraverso G_{min} oppure un μ_L minimo (situati a LF)

Infine, ~~per avere~~ la ~~realiz~~ realizzabilità come viene tradotta graficamente?

Se abbiamo poli maggiori o uguali degli zeri, abbiamo all'infinito che (2) L deve essere più pendente di G o ugualmente pendente

φ_m non è rappresentato graficamente $\varphi_m = 180° - |\varphi_c|$ $\quad \varphi_c = \measuredangle[L(j\omega)]$

Perciò:

1) Si progetta il modulo 2) Si verifica la φ_m attraverso la nostra L candidata.
3) Se φ_m non è adeguato riprogetto il modulo iterativamente per mettere a posto φ_m.

Progetto di massimo (nel caso di applicabilità del criterio di Bode)

$$R(s) = \underbrace{\frac{\mu_R}{s^{g_R}}}_{R_1} \cdot \underbrace{\frac{\prod(1+s\tilde{T}_{R_i})}{\prod(1+sT_{R_i})}}_{R_2} = R_{STAT}(s) \cdot R_{DINAM}(s) \longrightarrow \text{Progetto in ordine:}$$
$$= R_1(s) \cdot R_2(s)$$

1) Progetto R_1 curandomi solo dei requisiti statici $\longrightarrow$ R_1 fissato e non più modificato $\longrightarrow$
2) Progetto R_2 " " " " dinamici $\longrightarrow R_2$

Nel 1) assumo che il sis sia As in anello chiuso, verifico ~~poi~~ poi la stabilità solo giungendo al passo 2)

Esercizio

$$G(s) = \frac{10}{(1+10s)(1+30s)(1+100s)} \quad \text{(con costanti tempo in evidenza)}$$

$y^o = \mathrm{sca}(t) \quad |d(t)| = 2\,\mathrm{sca}(t) \qquad \omega_c > 0{,}05 \text{ rad/s} \quad \varphi_m > 35° \quad |e_\infty| \le 0{,}1$

Inizio con $R_1(s) \longrightarrow$ progetto statico:

$|e_\infty| = |e_{y^o}(\infty) + e_d(\infty)|$ io so che $|\text{somma}| \le$ somma dei moduli (disug triang)

perciò, sapendo che il valore assoluto è op. non lineare, posso porre la condizione sulla somma dei moduli, mantenendo la linearità

$|e_\infty| = |e_{y^o}(\infty)| + |e_d(\infty)| \le 0{,}1$ sapendo che $G(s) = \frac{\mu_g}{s^{g_g}} \cdot \frac{\cancel{\prod(1+s\tilde{T}_{g_i})}}{\cancel{\prod(1+sT_{g_i})}} \to 0$ per LF

$$e_{y^o}(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{1+\frac{\mu_r \mu_g}{s^{g_r+g_g}}} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{\mu_r \cdot 10}{s^{g_r}}} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{s^{g_r}}{1+10\mu_r} \nearrow \begin{cases} \frac{1}{10\mu_r+1} & g_R = 0 \\ 0 & g_R \ge 1 \end{cases}$$

$$e_{d\,\infty} = \lim_{s\to 0} \begin{cases} \frac{2}{1+10\mu_r} & g_r = 0 \\ 0 & g_r \ge 1 \end{cases}$$

Posso fare 2 ~~scelte~~ scelte nel progetto statico $g_r \ge 1 \Rightarrow |e_\infty| = 0 < 0{,}1$ ✓

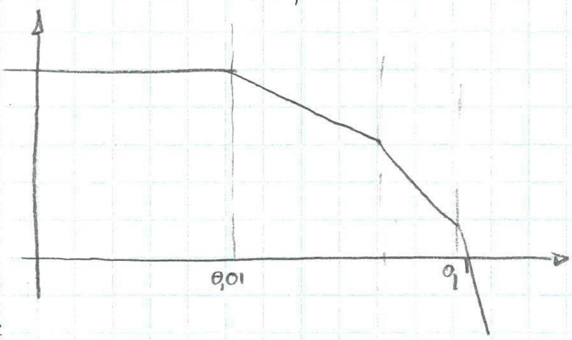
$g_r = 0 \Rightarrow |e_\infty| < \frac{3}{1+10\mu_r} < 0{,}1$?

Devo verificare che $\frac{3}{10\mu_r+1} < 0{,}1$ per davvero $\Rightarrow \mu_r \ge 2{,}9$

nel caso ① setto un tipo positivo e non ne sbatto di μ_r

Nel caso ② ho grado zero e quindi devo assicurarmi di avere un $\mu_r > 2,9$ che garantisca $|e_\infty| < 0,1$

Scegliamo il caso ②, in cui $\mu_R \geq 2,9$ quindi scelgo per esempio $\mu_r = 10$ $\quad R_1(s) = 10$



Progettiamo $R_2(s) = \dfrac{(\prod 1+sT_i)}{(\prod 1+sT_i)}$

1) Considero $R_2(s) = 1$ e guardo $L(s)$

Vedendo il diag. bode $\omega_c = 0,15 \frac{rad}{s} > 0,05 \frac{rad}{s}$ la specifica

calcolo $\varphi_c = \measuredangle L(j\omega_c) = -40° < 0$ non va bene

2) Progetto R_2 in termini di sis a fase minima

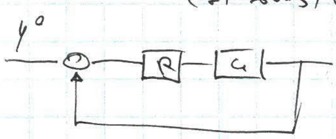
Devo introdurre dei poli per la realizzabilità, con un polo di 1000 taglio con pendenza -1 a $0,1$ rad/s

$$\varphi_c = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1000}{0,1}\right) - 2\operatorname{arctg}(5 \cdot 0,1) = -89° - 2 \cdot 27° = -143°$$

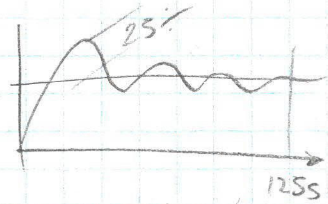
$$\varphi_m = 180 - 143° = 37° > 35°$$

$$L^*(s) = \frac{100}{(1+1000s)(1+5s)^2} = GR = \frac{10}{(1+10s)(1+100s)(1+30s)} \cdot 10 \cdot \frac{\prod(1+s\tau_i)}{\prod(1+sT_i)} \longrightarrow R_2(s) \longrightarrow$$

$$R_2(s) = \frac{(1+10s)(1+30s)(1+100s)}{(1+1000s)(1+5s)^2}$$ ho cancellato i poli inutili



$\longrightarrow$ Guardo la risposta a y°



Abbiamo due poli complessi coniugati dominanti

$$T_{ASS} = \frac{5}{\omega_n \xi} \simeq 125\,s \qquad \omega_N = 0,1 \text{ rad} \qquad \xi = 0,37 \qquad \Delta_\% = 100\, e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \simeq 25\%$$

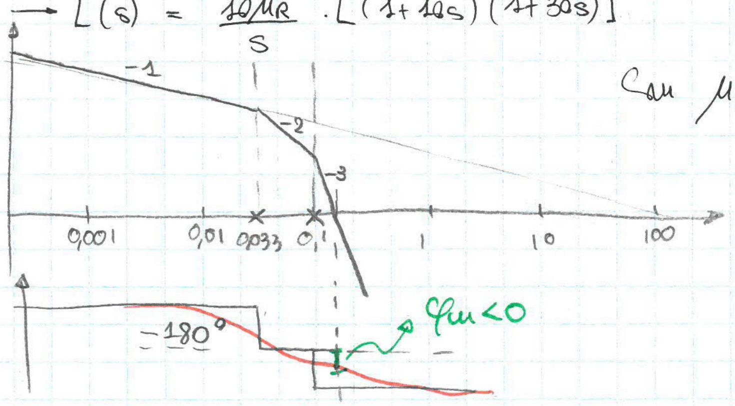
Vediamo invece il caso 1) $\quad R(s) = \frac{\mu_R}{s} \cdot R_2(s) \quad L(s)$ ha $\omega_c = 0,1 \frac{rad}{s}$ con $\varphi_c < 0$

Quindi $\varphi_m < 0 \Rightarrow$ instabile

Se introduco zeri stabili in $L(s) \Rightarrow$ uno zero dà contributo di $+90°$

Poniamo per esempio $R_2(s) = 1 + 100s$ $\quad$ Quindi $R(s) = \frac{\mu_R}{s} \cdot (1+100s) \rightarrow$

$$\rightarrow L(s) = \frac{10\mu_R}{s} \cdot [(1+10s)(1+30s)]^{-1}$$



Con $\mu_R = 1$ $\quad \omega_c \simeq 0,3$ rad/s

Abbiamo ancora instabilità $\varphi_m < 0$

tolgo un altro polo

$R_2(s) = (1+100s)(1+30s)$ $\quad L_2(s) = \dfrac{10\mu_R}{s(1+10s)}$ $\to$ R non è realizzabile (al momento)

Disegnamo il diagramma di Bode e vediamo che $\varphi_m > 0$ ma è molto vicino a 0°

Non sto ancora rispettando il requisito di 35°

Dato che con l'unico polo rimasto a 0,1 ottengo $\varphi_m = 45°$, traslo (con μ_R) per spostare ω_c a 0,1 $\quad R(s) = \dfrac{(1+100s)(1+30s)}{s} \cdot \underbrace{0{,}01}_{}$ traslazione verso il basso di 40dB

Non è ancora realizzabile tho, aggiungiamo un polo ad HF tipo $(1+\cancel{0{,}01}\,0{,}1s)$

$R(s) = \dfrac{(1+100s)(1+30s)}{s(1+0{,}1s)}$ ho il controllore realizzabile e ottengo $\omega_c = 0{,}1\ \frac{rad}{s}$ $\varphi_m \hat{=} 45°$

Inconvenienti nella progettazione di ω_c ad alte frequenze

Cosa succede se ω_c è troppo alta? Abbiamo degli inconvenienti:

1) In HF Q ha modulo molto alto $\to$ il controllore ecciterà il sis ad alta frequenza. Ciò corrisponde ad eccessive ~~eccitazioni~~ sollecitazioni di tipo meccanico o elettrico

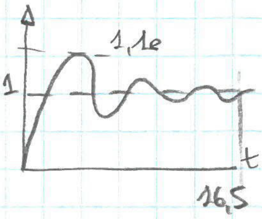
2) Stiamo lavorando con dei modelli $\to$ sono buone approx a LF. Se andiamo a HF potenzialmente il modello utilizzato non è affidabile. es: a LF possiamo ignorare induttanze e capacità parassite. Se usiamo il modello senza parassite in HF, il gioco si complica e rischio di andare ad eccitare risonanze che ci sono ma che non ho considerato nel mio modello.

3) Rischio di ritardi in anello (es controllore digitale che introduce latenza a causa del ritardo introdotto dal clock) che hanno ~~generalmente~~ zero contributi al modulo ma contribuiscono sulla fase con $-\omega_c \cdot \tau \cdot \frac{180}{\pi}$, ho la ω_c fissa come senza ritardo ma la fase cala ancora di più

4) Non abbiamo tenuto conto del rumore di misura HF $\to$ incertezze.

Trattamento del ritardo in fase di progetto

$G(s) = \frac{10}{s+1} e^{-0,1 s}$ progettare $R(s)$ con $|e_\infty| < 0,1$ per $y^\circ = sca(t)$ $T_{ASS} \le 16,5s$ $\Delta\% \le 10\%$



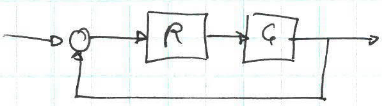
$\varphi_m = 75^\circ \Longrightarrow T_{ASS} = \frac{5}{\omega_n \xi}$ $\Delta\% = 100 e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Trovo (equaz $\Delta\%$) con $\Delta\% < 10\% \Longrightarrow \xi \ge 0,55 \Longrightarrow \varphi_m \ge 55^\circ$ circa

Calcolo la ω limite tramite T_{ASS} $\omega_c = 0,55$ rad/s

Ho tradotto T_{ASS} e $\Delta\%$ in richieste ω_c e φ_m utilizzabili per il progetto.

Progetto statico:



Considero $R_1 = \frac{\mu_R}{s^{g_r}}$ $e_\infty = \left|\frac{1}{1+10\mu_R}\right|$ se $g_r = 0$

Quindi $\left|\frac{1}{1+10\mu_R}\right| < 0,1$ $\mu_R > \frac{9}{10}$ scelgo $\mu_R = 1$

Progetto dinamico: $\omega_c > 10$ rad/s se non consideriamo il ritardo abbiamo $\varphi_m \cong 90^\circ$ $(180-84)$

inserendo il ritardo (bisogna considerarlo nel calcolo della fase)

$\varphi_c = -atg(1 \cdot 10) - \angle e^{-0,1 j\omega} = -atg(10) - 10 \cdot 0,1 \cdot 180/\pi = -84^\circ - 57^\circ \cong -141^\circ$

↳ punto su piano complesso di modulo unitario e fase $0,1\omega$

$\varphi_m = 180 - 141^\circ = 39^\circ < 55$ desiderati → non va bene

Guardiamo solo il ritardo $\varphi_c = -\omega_c \cdot 0,1 \cdot \frac{180}{\pi}$ $\varphi_m \ge 60^\circ$ ~~$\varphi_c \ge -120^\circ$~~

Se $\varphi_c > -120^\circ$ $-\omega_c \cdot 0,1 \cdot \frac{180}{\pi} > -120^\circ$ $\underline{\underline{\omega_c < 21 \text{ rad/s}}}$] → Abbiamo un vincolo legato dal ritardo

Se prima potevamo raggiungere qualunque ω_c, ora, a causa del ritardo, abbiamo una limitazione di ω_c a meno che non venga trattato il ritardo in altri modi.

L'unica speranza di modifica per controllori del genere è la riduzione della banda passante.

Per esempio posso progettare $R_2(s)$ per cancellare il polo che causa $\omega_c = 10$ rad/s e sostit. con un polo a più bassa frequenza → contributo minore del ritardo.

$R_2(s) = \frac{s+1}{1+10s}$ ↗ Abbiamo il nuovo polo, ottenendo $\omega_c = 1$ rad/s (una decade dopo 0,1 rad/s (polo))

Il contributo del polo sarà sempre circa -84° (siamo sempre una decade dopo)

$|\varphi_c| = \left|-84^\circ - \underbrace{0,1 \cdot 1 \cdot \frac{180^\circ}{\pi}}_{6^\circ}\right|$ → $\varphi_m = 180^\circ - 91^\circ = 89^\circ > 55^\circ$ ☺

es $\quad G(s) = \frac{1-s}{1+10s} \qquad R = \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{(1-s)} \qquad L = \frac{10}{s(1+10s)}$

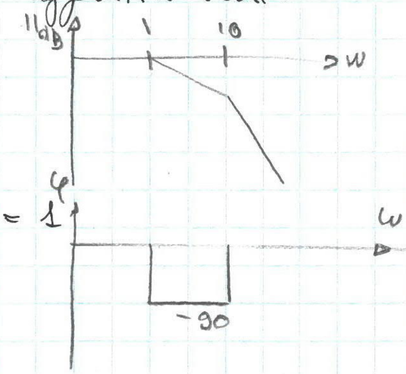
R ha un polo instabile perché faccio una cancellazione critica

$$Q = \frac{R}{1+RG} = \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{(1-s)} \cdot \frac{s(10s+1)}{10s^2+s+10}$$ → Ricompare il polo instabile

Ho un polo instabile in anello → NIENTE BODE

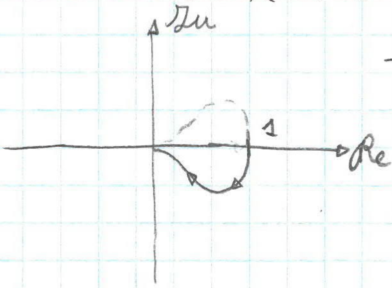
⟹ Non si possono cancellare singolarità instabili

- Se la singol. è uno zero → "ci progetto intorno" → vincolo aggiuntivo nella L
- Se " " " " polo ⟹ devo usare Nyquist



es:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(-0{,}1s+1)}$$ polo in -1 (stabile), 10 (instabile)] → $p = 1$

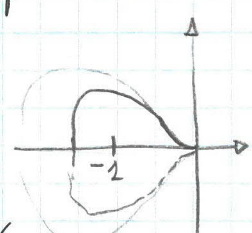


→ Sicuramente non posso stabilizzare

con • $R = 1$ → $n \neq p$ ⟹ ~~instabile~~ non è stabile

• $R = K$: se $K > 0$ non può stabilizzarlo

se $K < 0$ vedi corollario criterio Nyquist → conto i giri intorno a 1, non più a -1



Caso $-1 < K < 0$ → no stabile

Caso $K < -1$ → gonfio il diagramma oltre il pto 1

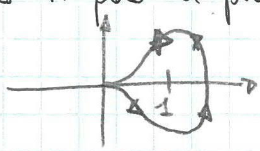
Faccio -1 giri attorno al pto 1, ma $-1 \neq 1$, $n \neq p$] → No stabile

Non ho modo di stabilizzare l'anello chiuso con solo K

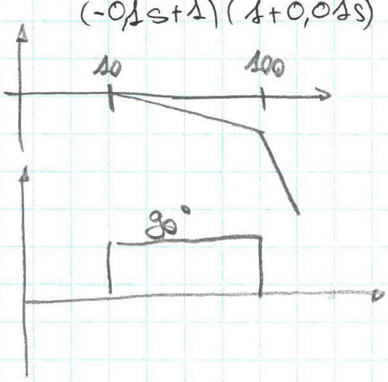
Se invertissi i giri passando da -1 a 1, avrei stabilità. Manipolo la fase per far avvenire ciò, manipolando il polo stabile

$$R(s) = -2\,\frac{(s+1)}{(1+0{,}01s)}$$ → cancellazione; → mantengo la condizione $K<-1$; → sposto il polo a più alta frequenza di quello instabile

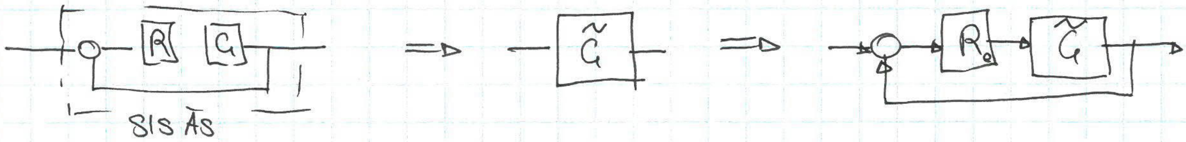
$$L(s) = \frac{-2}{(-0{,}1s+1)(1+0{,}01s)}$$



$n = p \quad 1 = 1$ ⟹ sis stabilizzato



Riesco a garantire solo la stabilità con Nyquist. Come faccio a voler avere delle buone prestazioni? O almeno voglio ottenere prestazioni specifiche



Metto un nuova ~~real~~ retroazione perché so che $\tilde{G}$ è A.S.

Controllori PID

Sono controllori in commercio già realizzati.

PID = proporzionale, integrale, derivativo. $u = u_P + u_I + u_D$

$u_P = K_P \cdot e$ → azione proporzionale all'errore (no poli/zeri)

$u_I = K_I \int_0^t e(\tau)\, d\tau$

$u_D = K_D \dfrac{de}{dt}$

→ dominio nel tempo, che ce ne facciamo?

Trasformiamo nel dominio delle frequenze $e \to \boxed{R} \to u$

$$\frac{u(s)}{E(s)} = K_P + K_I \cdot \frac{1}{s} + s K_D = \frac{sK_P + K_I + K_D s^2}{s} = \underbrace{\frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}}_{\text{PID IDEALE}}$$

NON REALIZZABILE

perché a rigori non posso calcolare la derivata di un segnale (ho bisogno del suo futuro). La derivativa a rigori è anticipatrice. Posso implementare un PID reale aggiungendo un polo HF

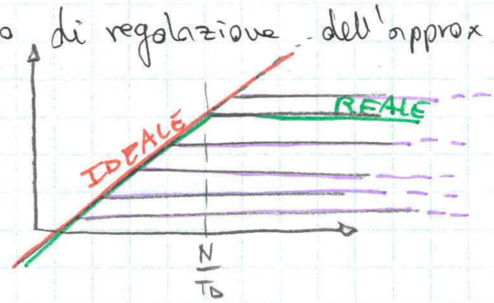
$$R_{PID}(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{sT_i} + \underbrace{\frac{sT_D}{1 + \frac{T_D \cdot s}{N}}}_{\text{polo per la realizzabilità del PID}}\right)$$

Ho una diversa parametrizzazione di K_D e K_I

$T_I = \dfrac{K_P}{K_I}$ $\quad T_D = \dfrac{K_D}{K_P}$ In ambito industriale si trovano entrambe le parametrizzazioni

N = parametro aggiuntivo di regolazione dell'approx dell'azione derivativa

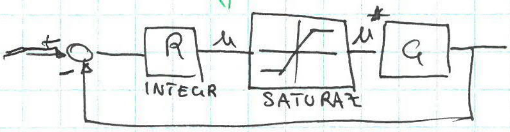
- Derivativa $\dfrac{sT_D}{1 + \frac{T_D s}{N}}$



N mi dà l'idea ~~approx~~ di quanto l'approx usata sia ad alta frequenza.

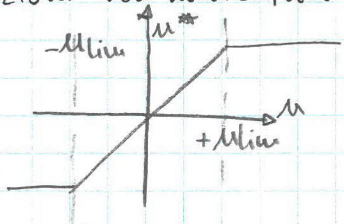
Posso ~~...~~ ricondurmi alla taratura del PID se so che durante il progetto di R so di poter usare solo due zeri, un polo nell'origine e uno spostato.

Carica integrale



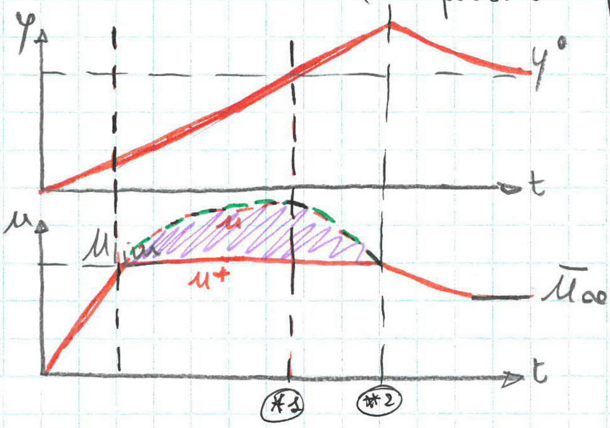
Se integro (aumenta il valore di u troppo) e arrivo alla saturazione, non ho più controllo sopra la saturazione.

es: limitazioni nell'aumentare la coppia di un auto ~~in poco tempo~~ più del massimo poss.



Dentro U_{limite} → blocco unitario

fuori u limite → saturazione
(non posso dare più di tot al blocco di controllo)



Consideriamo ora un regolatore di tipo integrale

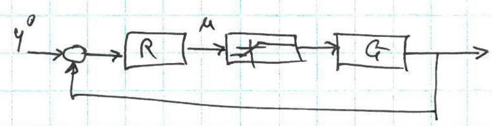
$R(s) = \frac{K_I}{s}$

*1: l'uscita supera il valore assegnato $y°$, ma il controllore è già saturo da un po'. Ci vuole un po' di tempo prima che esso torni giù *2

L'area lilla è la carica integrale, ho una variabile di controllo che cresce ma quella reale rimane fissa. È come se avessi aperto l'anello. Il fenomeno introduce un peggioramento delle prestazioni non rappresentabile con il diag Bode. Se va male, rischio anche l'instabilità invece che la diminuzione delle prestazioni

Controllori PID (anti wind-up)

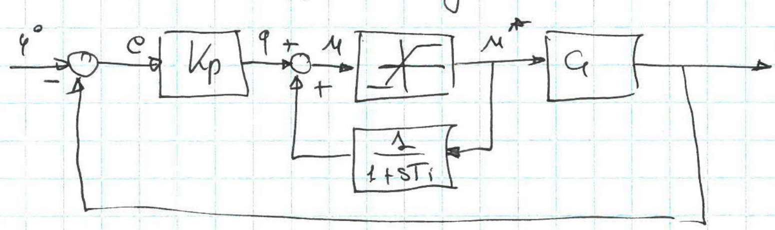
- carica integrale < il controllore ha azione integrale / l'attuatore ha saturazione



Come risolviamo questo problema guardando i PID?

La parte derivativa non soffre della carica integrale

$R_{PI} = K_p\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$

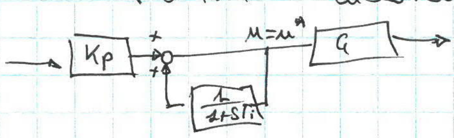


Questa è un'azione proporzionale integrale con anti windup

Dobbiamo convincerci che esso funzioni come da specifica quando non è in sat ①

e dobbiamo controllare che risolva il discorso della saturazione ②

① $U_{min} \leq U \leq U_{max}$



$\frac{U(s)}{e(s)} = K_p \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+sT_i}} = K_p \cdot \frac{1+sT_i}{\cancel{1}+sT_i-\cancel{1}}$

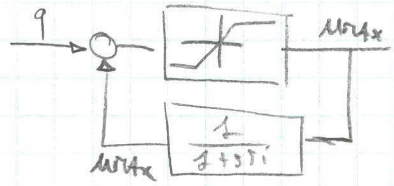
$\boxed{= K_p \cdot \frac{1+sT_i}{sT_i}}$ → è uguale a $R_{PI} = K_p\left(1+\frac{1}{sT_i}\right)$ ✓ funziona normalmente

② Abbiamo ora invece ~~…~~ $u^* = u_{MAX}$ perché $e > 0$ per molto tempo

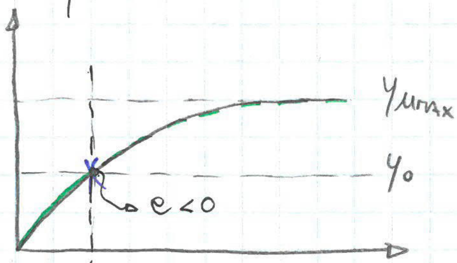
Abbiamo un punto in cui $e < 0$

allora $q < 0$ che ~~…~~ si somma

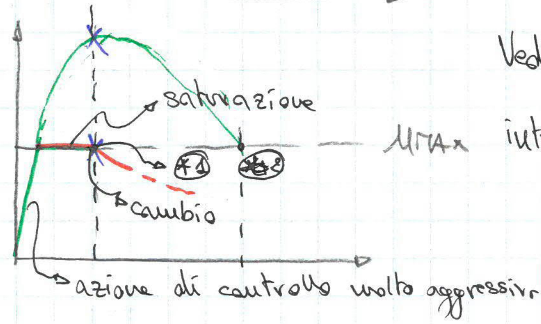
a u_{MAX}. Ottengo $u = u_{MAX} + \underbrace{q}_{<0}$



Che quindi causa $u < u_{MAX}$ $\rightarrow$ mi riconduco al caso senza saturazione



(e cambia segno perché ho un y maggiore di quello che vorrei del riferimento)

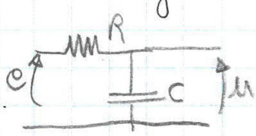


Vediamo che *1 è molto più rapido di *2 ad intervenire. L'antiwindup interviene prima

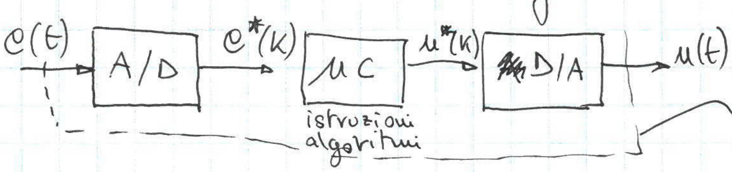
Realizzazione digitale

Partiamo dall'Hp di avere già risolto la FdT $R(s)$, come la costruisco digitalmente?

Possiamo generalmente realizzarlo analogicamente e digitalmente
↳ progettazione del circuito



Vediamone la realizzazione digitale (molto versatile)

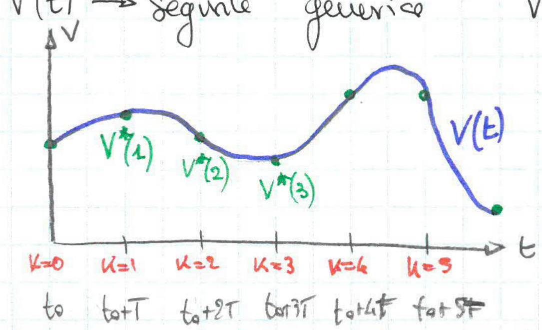


Voglio che tutto ciò si comporti come un $\sim R(s)$. Posso cambiare molto facilmente i parametri (cosa che è difficile analogicamente)

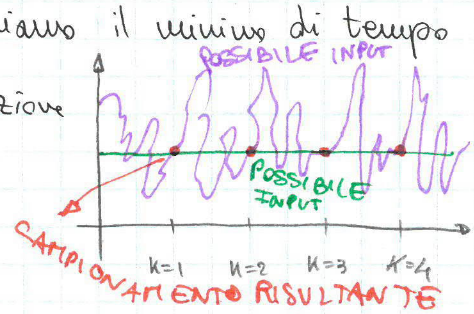
Sto lavorando digitalmente $\rightarrow$ tempo discreto $\rightarrow$ R(digitale) $\sim R(s)$ vera e propria

Campionatore

$V(t) \rightarrow$ segnale generico $\quad V^*(k) = V(t_k)$ dove $t_k = t_0 + kT$ in cui $k = 0, 1, 2, \dots$



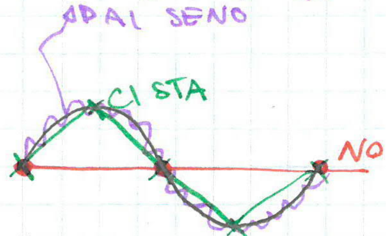
Va bene il tempo T? Vediamo il minimo di tempo per avere una rappresentazione affidabile di $V(t)$



Vediamo che non è detto che il campionamento sia fedele

Sappiamo che possiamo rappresentare $V(t)$ tramite Fourier

$$V(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |V(j\omega)| \sin(\omega t + \measuredangle V(j\omega))\, d\omega \; \Big] \rightarrow \text{tutti seni}$$



Se prendo $V(t) = \sin t$ che frequenza devo avere per distinguerlo da un segnale costante? Con frequenza di campionamento corrispondente al mezzo periodo, distinguo il seno dal segnale costante (ma non lo distinguo con pulsazioni più elevate)

Data una pulsaz massima ω_{MAX}, se $T < \frac{\pi}{\omega_{MAX}} \Longrightarrow$ non perdo informazioni

Teorema di Shannon

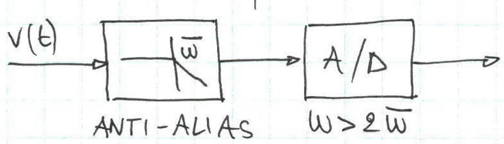
Dato un segnale $v(t)$ a banda limitata da ω_{MAX}, esso è ricostruibile univocamente dalla sua versione campionata $V^*(k) = V(t_k)$ se $\omega_N > \omega_{MAX}$ dove $\omega_N = \frac{1}{2}\omega_s$ (pulsazione di Shannon)

In cui ω_s = pulsazione di sampling = $\frac{2\pi}{T}$ → tempo di campionamento.

(Oss: ω_N è anche detta pulsazione di Nyquist)

In realtà ho sempre rumore HF quindi $> \omega_{MAX} \Longrightarrow$ USO FILTRO ANTI ALIAS

Se $V(t)$ non è quindi a banda limitata, è necessario introdurre il filtro anti alias.



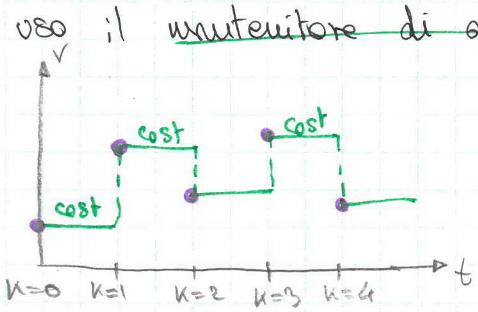
Se bypasso μC e da A/D riconverto D/A, se rispetto Shannon, mi ritrovo in uscita un segnale fedele all'entrata.

Decampionatore ideale

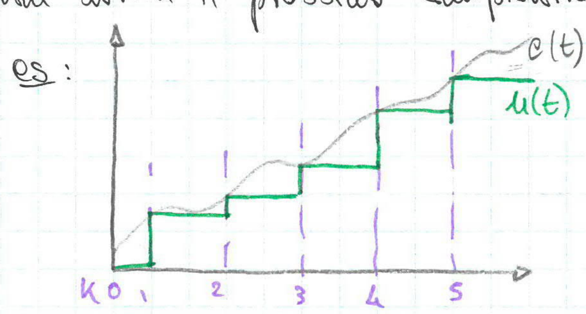
$$V(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V^*(k)\, \frac{\sin(\omega_N t - k\pi)}{\omega_N t - k\pi}$$

→ per l'idealità, ho bisogno di valori passati e futuri (tralasciamo l'impossibilità di $-\infty$ e $+\infty$ perché sono questi indici di passato futuro). Questo è nel caso del tempo reale. Se volessi convertire un file audio so perfettamente i campioni passati e futuri nel file.

Per azioni di controllo quindi il decampionatore ideale non è realizzabile, uso il ~~mantenitore di ordine zero~~: mantengo il segnale costante fino a che non arriva il prossimo campionatore

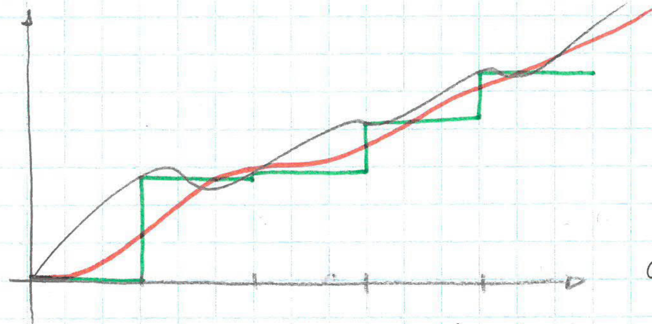


es:



→ Supponendo $\mu C = 1$

Possiamo filtrare gli scalini attraverso il passa basso



Vediamo che l'uscita filtrata rispetto all'ingresso risulta ritardata. Ho infatti un ritardo di mezzo periodo di campionamento dovuto al fatto che non so passato/futuro.

Di conseguenza ho un ritardo in anello $\Longrightarrow$ diminuzione di margine di fase

Devo tenere conto del ritardo in anello nella progettazione del controllore.

Il controllore è una serie di istruzioni che calcolano $u^*(k)$ a partire da $e^*(k)$

$e^*(k) \longrightarrow \boxed{\text{SCATOLA MAGICA}} \longrightarrow u^*(k)$ → Questi sono sis a tempo discreto.

Rappresentazione per sis a t. discreto

$$\begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) = C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases}$$ → movimento libero e movimento forzato

Il movimento libero ha l'equivalente di Lagrange calcolabile iterativamente

$u(k) = 0 \qquad x(0) \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(1) &= A x_0 \\ x(2) &= A x_1 = A^2 x_0 \\ x(3) &= A x_2 = A^3 x_0 \end{aligned}\right] \to x_L(k) = A^k x_0$$

Movimento forzato

~~$x_0 = 0$~~ $x(k) = 0 \qquad u(k) \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} x(1) &= A x_0 + B u_0 = B u_0 \\ x(2) &= A x_1 + B u_1 = A B u_0 + B u_1 \\ x(3) &= A x_2 + B u_2 = A^2 B u_0 + A B u_1 + B u_2 \end{aligned}\right] \to x_F(k) = \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-1-h} \cdot B u(h)$$

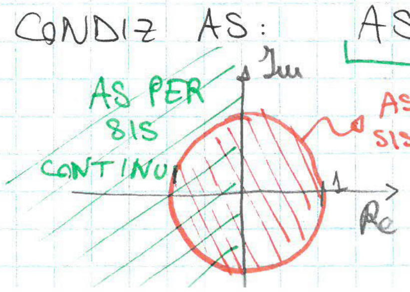
Vale comunque la sovrapposizione delle cause e degli effetti

Dati x_L e x_F possiamo ricavare le condizioni di stabilità:

es $x(k+1) = a \cdot x(k)$ → caso scalare $x_L(k) = a^k x_0$

~~Se~~ prendo $|a| < 1$ per avere convergenza

CONDIZ AS: $AS \iff \underbrace{\forall \lambda \text{ t.c. } \lambda \text{ è autovalore di } A}_{|\lambda| < 1}$ quindi



Data A: $|\lambda_i| \leq 1$ e $\forall \lambda_i : |\lambda_i| = 1 \quad mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$

⇓

SEMPLICE STABILITA'

Trasformata zeta

Def: Sia dato $v(k) = \{v(0), v(1), v(2), v(3), ...\}$ la sua trasformata zeta è
$$V(z) = v(0) + v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} ... = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) \cdot z^{-k} \quad \text{con } z \in \mathbb{C}$$

Impulso a tempo discreto

$$imp(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k=0 \\ 0 & \text{per } k \neq 0 \end{cases} \qquad \mathcal{Z}[imp(k)] = 1 + 0z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + 0 \cdot z^{-3} = 1$$

- Esponenziale a TD

$v(k) = a^k \qquad \mathcal{Z}[a^k] = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k$ → è la serie geometrica

La serie geometrica converge a $\dfrac{1}{1-az^{-1}} = \dfrac{z}{z-a}$ se $|z| > a$ → equivalenza dell'ascissa di convergenza del caso continuo (vedi trasformata laplace)

è simile nel caso continuo $v(t) = e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s-a}$

- Scalino a TD

$$sca(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k>0 \\ 0 & \text{per } k<0 \end{cases}$$ → è equivalente a un exp discreto in cui $a=1$

$$\mathcal{Z}[sca(k)] = V(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

PROPRIETÀ TRASFORMATA ZETA

1) Linearità $\quad v(k) = \alpha v_1(k) + \beta v_2(k) \to V(k) = \alpha V_1(z) + \beta V_2(z)$

2) Anticipo $\quad V_2(k) = v_1(k+1) \qquad V_2(z) = z[V_1(z) - v_1(0)]$

3) Ritardo $\quad V_2(k) = V_1(k-1) \qquad V_2(z) = z^{-1}[V_1(z)]$

es $\quad V_2(k) = V_1(k+1) \qquad$ (DIM anticipo)

$$V_2(z) = V_2(0) + V_2(1)z^{-1} + V_2(2)z^{-2} ... = V_1(1) + V_1(2)z^{-1} + V_1(3)z^{-2} ... =$$
$$= \left(V_1(1)z^{-1} + V_1(2)z^{-2}\right)z + V_1(0)z - V_1(0)z$$

$\mathcal{Z}[V_1]$ porto dentro

$$= (V_1(z) - V_0) \cdot z$$

es Ritardo è come l'anticipo un "rigirato"

→ z operatore di anticipo

→ z^{-1} operatore di ritardo

$$\left.\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}\right] \xrightarrow{\mathcal{Z}} z[x(z) - x(0)] = Ax(z) + Bu(z) \to$$

$\mathcal{Z}[x(k+1)] = (x(z) - x(0))z$

$\to (zIx - x(0)z) - Ax(z) = Bu(z) \to$

$\to (zI - A)x(z) = Bu(z) + zx(0) \to$

$\to x(z) = (zI-A)^{-1}Bu(z) + \cancel{(zI-A)^{-1}z\,x(0)}$ considero se $x(0)$ nullo ottengo ⇒

$$\Rightarrow y(z) = [C(zI-A)^{-1}B + D]u(z)$$

posso vedere in ultima analisi che $y(z) = G(z) \cdot u(z)$ in cui $G(z)$ é la FdT del sistema a T.D. Vediamo il parallelismo con il tempo continuo.

$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$ Anche nel TD $G(z)$ é ~~possibile~~ scrivibile come $\frac{N(z)}{D(z)}$

Vale lo stesso ragionamento per poli e zeri.

$y(z) = G(z)\,u(z)$

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \qquad y(z)\,D(z) = N(z)\,u(z) \longrightarrow$$

$$\rightarrow (z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0)\, y(z) = (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0) \cdot u(z)$$

$$\left. y(z) \cdot z^n + y(z) \cdot a_{n-1} z^{n-1} + \dots = u(z)\, b_m z^m + u(z)\, b_{m-1} z^{m-1} \right] \Rightarrow \text{antitrasformo}$$

$y(z)\,z^n \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y(k+n)$ (segnale traslato nel dominio del tempo di n passi)

$u(z)\,z^m \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} u(k+m)$ $\rightarrow$ sfrutto la linearità della trasformata

$$y(k+n) + a_{n-1}\, y(k+n-1) + \dots = b_m\, u(k+m) + b_{m-1}\, u(k+m-1) + \dots$$

$$y(k+n) = -a_{n-1}\, y(k+n-1) + \dots + b_m\, u(k+m) + b_{m-1}\, u(k+m-1) + \dots \longrightarrow$$

$\rightarrow$ questa rappresentazione é detta equazione alle differenze

(che é un eq differenziale nel caso di sis tempo continuo)

I valori all'istante ~~passato~~ precedente dipendono dai valori passati

Questa eq é sia la def del sis, sia l'algoritmo di calcolo del sis (grazie ai valori passati posso calcolare i valori successivi da buttare fuori)

es

$$G(z) = \frac{z+3}{z^2+0{,}5z+1} = \frac{y(z)}{u(z)}$$

$$y(z) \cdot (z^2 - 0{,}5z + 1) = u(z)(z+3) \qquad z^2 (y(z)) - 0{,}5z(y(z)) + y(z) = z\,u(z) + 3u(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}}$$

$y(k+2) - 0{,}5(y(k+1)) + y(k) = u(k+1) + 3u(k)$ traslo l'asse dei tempi di 1 passo

$$y(k+1) - 0{,}5\,y(k) + y(k-1) = u(k) + 3u(k-1)$$

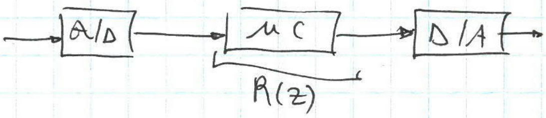
Se sono all'istante k, il prossimo valore dell'uscita é:

$$y(k+1) = 0{,}5\,y(k) - y(k-1) + u(k) + 3u(k-1)$$

Implementiamo lo pseudocodice:

```
while (1) {
 - read u
 - y_new = 0,5 y - y_old + u + 3 u_old
 - y_old = y
 - y = y_new
 - u_old = u
}
```

Scelta di $R(z)$



$R(z) = ?$ → progetto digitale
→ progetto $R(s)$ (continuo) e dopo discretizzo in $R(z)$

Nel 2° caso non riusciremo mai ad avere $R(z) \simeq R(s)$ ~~per~~ a causa del ritardo introdotto da campionatori e mantenitori

Discretizzazione

$u \to \boxed{\frac{1}{s}} \to y \qquad y(t) = \int_0^t u(\tau)\,d\tau$ voglio un $R(z)$ tc $y^*(KT_s) \simeq y(KT_s)$ ← variabili digitali campionate

$y^*(k) = y^*(k-1) + \bar{u}(k) T_s$

Se $\bar{u}(k)$ = valore medio di $u(t)$ con $t \in [(k-1)T_s, kT_s]$ però, per come abbiamo definito il mantenitore zero

$y^*(k) = y^*(k-1) + \tilde{u}(k) T_s$ in cui $\tilde{u}(k) = (1-\alpha) u^*(k-1) + \alpha u^*(k)$ in cui $0 \le \alpha \le 1$

Definisco il valore come una combinazione lineare dei due valori. In base ad α:

① $\alpha = 0 \quad \tilde{u}(k) = u^*(k-1) \longrightarrow$ Eulero in avanti o esplicito

② $\alpha = 1 \quad \tilde{u}(k) = u^*(k) \longrightarrow$ Eulero indietro o implicito

③ $\alpha = \frac{1}{2} \quad \tilde{u}(k) = \frac{u^*(k-1) + u^*(k)}{2} \longrightarrow$ faccio un'approx trapezoidale $\longrightarrow$ Tustin

$$y(z) = z^{-1} y(z) + T_s\left(z^{-1}(1-\alpha) u(z) + \alpha u(z)\right)$$

$$\frac{y(z)}{u(z)} = T_s \frac{\alpha z + (1-\alpha)}{z-1} = T_s \frac{\alpha + (1-\alpha) z^{-1}}{(1 - z^{-1})}$$

→ possiamo scrivere un FdT

$$\underset{\text{tempo continuo}}{\frac{1}{s}} \longrightarrow \underset{\text{tempo discreto}}{T_s \frac{\alpha + (1-\alpha) z^{-1}}{(1 - z^{-1})}}$$

Posso ricavare un derivatore ~~invertito~~ con il reciproco:

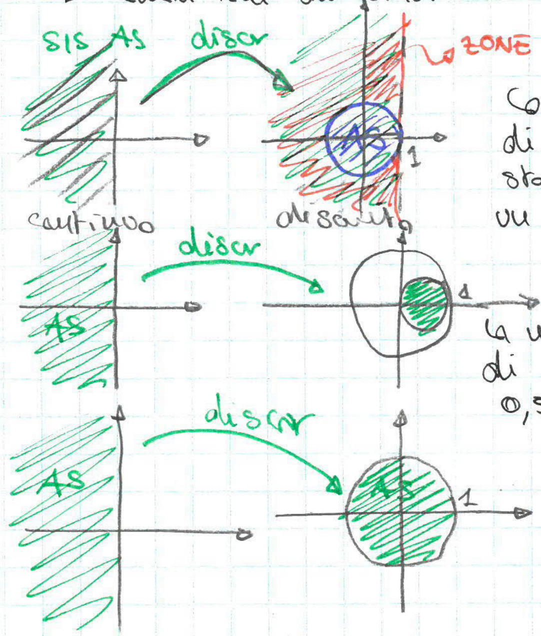
$$s \longrightarrow \frac{z-1}{T_s(\alpha z+(1-\alpha))} \Longrightarrow$$ trasformazione bilineare

Permette di trasformare la variabile s nella variabile z

Perciò dato $R(s) \xrightarrow[\text{discretizzazione}]{} R(z) = R\left(\frac{z-1}{T_s(\alpha z+(1-\alpha))}\right)$

Abbiamo le proprietà della discretizzazione

- Se $R(s)$ è razionale, $R(z)$ è razionale (se parto da LTI arrivo a sis lin a TD)
- Se $R(s)$ è propria (di ordine n) $\Longrightarrow$ $R(z)$ è propria di ordine n purché $R(s)$ non abbia poli esattamente in $\bar{s} = \frac{1}{\alpha T_s}$
- $R(s)$ con singolarità in $\bar{s}$ $\Longrightarrow$ $R(z)$ ha singolarità in $\bar{z} = \frac{1+(1-\alpha)T_s \cdot \bar{s}}{1+\alpha T_s \cdot \bar{s}}$; $\cancel{\Longleftarrow}$ non vale
- Zeri di campionamento: la discretizzazione ha il potere di creare zeri aggiuntivi (vedi la $s \to \frac{\text{zero}}{\text{polo}}$) ma non poli aggiuntivi
- La mappatura è 1:1 per i poli $\Longrightarrow$ condizioni di stabilità $\longrightarrow$ (tot poli in s $\Longrightarrow$ tot poli discretizzati senza poli in più)



- caso Eulero in avanti $\alpha=0$ (vengono spostati i poli)

Con questo caso rischio di non conservare la stabilità partendo da un sis AS nel continuo

- caso Eulero indietro $\alpha=1$

Manteniamo la stabilità, la mappatura è nella cfr di raggio 0,5 centrata in 0,5

- caso Tustin $\alpha=0,5$

La mappatura avviene in tutta la cfr di raggio 1

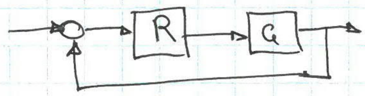
Solo con eulero in avanti devo verificare di mantenere la stabilità, negli altri casi la stabilità viene automaticamente mantenuta.

Ora parto da R(s) che soddisfa i requisiti, ~~come passi~~ dobbiamo tenere conto di:

1) Scelta del tempo di campionamento   3) Calcolo dei ritardi aggiuntivi

2) Discretizzazione di R(s)

1) Devo soddisfare Shannon trovando la ω_{MAX} necessaria



Devo normalmente scegliere $\omega_s \geq 2\omega_c$ (ideale)

In pratica si sceglie $\omega_s > 10\,\omega_c$ ~~ma~~ anche $\omega_s < 50\,\omega_c$

Non è da esagerare con la pulsaz MAX per motivi di: costo, mi basta un piccolo errore di conto per avere casini se ho T_s piccolo (posso rischiare di uscire dalla cfr 1 a causa di incertezze), se prendo ω_s intelligentemente sto abbondantemente all'interno della cfr

~~3) Per~~ 2) Decido Eulero avanti/indietro/Tustin e mantenere As

3) $\varphi_m^* = \varphi_m - \omega_c \dfrac{T_s}{2} \cdot \dfrac{180}{\pi}$ → perdita di fase dovuta al campionamento

Dobbiamo aggiungere anche $\left(-\omega_c \dfrac{T_{CALC}}{T} \cdot 180 - \angle\left[\text{Filtro anti-alias}\right]\right)$

→ tempo di μC per i conti

per precisione, questa aggiunta viene però trascurata.

es discretizziamo con Tustin

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 3} \qquad s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1} \qquad G(z) = \frac{1}{\frac{4}{(T_s^2)}\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} - \frac{8}{T_s}\frac{z-1}{z+1} + 3} =$$

$$= \frac{T_s^2 (z^2 + 2z + 1)}{4z^2 - 8z + 4 - 8T_s z + 8T_s + 3T_s^2 (z^2 + 2z + 1)} = \frac{T_s^2 (z^2 + 2z + 1)}{z^2(4 - 8T_s + 3T_s^2) + (6T_s^2 - 8)z + 4 + 8T_s + 3T_s^2}$$

→ zeri di campionamento