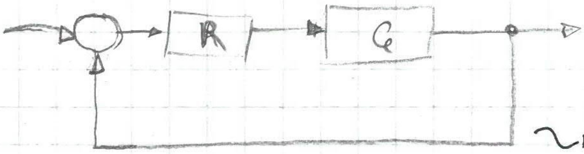
FONDAMENTI DI AUTOMATICA



R = regolatore G = sistema da controllare (auto, impianto, dispositivo elettronico, ecc)

↝ classico sis. controllo

Peculiarità dei sis di controllo

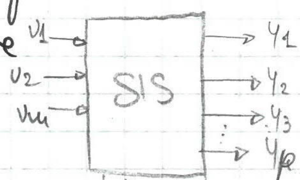
- sis fisico - 1 o più variabili da controllare - 1 o + var per influenzare il sis - specifiche di andamento voluto (desiderato) del sis

L'automatica è basata sulla descrizione matematica della realtà, perciò è indipendente dalla tecnologia

Problema di controllo: imporre funzionamento desiderato a sistema assegnato

Il sis assegnato è anche chiamato sis sotto controllo, dovrà essere descritto in modo matematico

Funzionamento desiderato: alcune variabili del sis vengono desiderate dal valore più o meno uguale rispetto a cosa impone l'utente



modello di sis

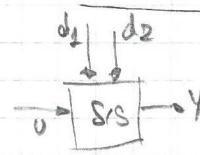
$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_p \end{bmatrix}$ ↝ VAR DI USCITA

Variabili di controllo: sono le var di "azione"

~~[illegible]~~ Se le variabili sotto controllo sono uguali al valore desiderato, equivale a dire $y = y_0$ in cui y_0 è un valore prefissato

$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$ VAR DI INGRESSO

Definisco, oltre ai vettori di input e out, il vettore dei disturbi

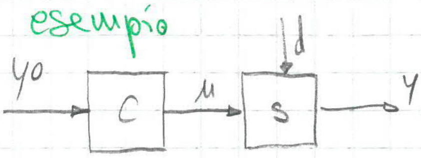


$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix}$ i disturbi non possono essere controllati

$u \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^p,\ d \in \mathbb{R}^r$ $u = u(t)$, $y = y(t)$, $d = d(t)$ in cui

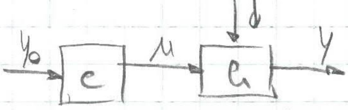
se $t \in \mathbb{R}$ — allora è a tempo continuo
$\in \mathbb{N}$ — discreto

esempio

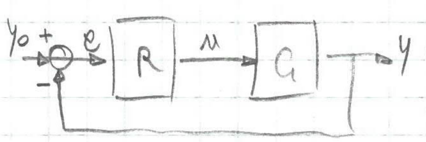


Determinare u: $y(t) \simeq y_0(t)$ sono specifiche qualitative

Introduciamo il controllo ad anello aperto ed il controllo ad anello chiuso



anello aperto

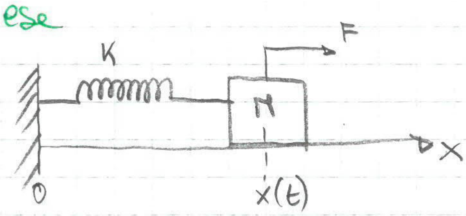


anello chiuso

Anello aperto: si hanno problemi di 1) disturbi ⎤→ problemi di ROBUSTEZZA
2) errori di modello ⎦

Anello chiuso: si hanno prob di 1) Ho bisogno di sensori (per la retroazione)
2) prestazione (é un sis reattivo, ~~[illegible]~~ si hanno dei limiti di prestazioni)

ese



Problema di controllo: sis sotto controllo + comportamento voluto → $x(t) = x_0$

All'equilibrio abbiamo che $F = -Kx$ $\quad x = \frac{-F}{K}$

devo progettare il sis di controllo ad anello aperto:

~~[illegible]~~ scelgo $F = K_n x_0$ $\quad n$ = nominale (potrei non conoscere perfettamente il valore della cost. elastica K)

Riscrivo $x = \frac{K_n x_0}{K}$ $\begin{cases} \text{se } K_n = K & x = x_0 \text{ situaz. nominale} \\ \text{se } K_n \neq K & x \neq x_0 \to \text{se } x = \frac{K_n}{K + \Delta K} x_0 \text{ allora} \end{cases}$

$$\boxed{x = \underbrace{x_0}_{\text{valore voluto}} - \underbrace{\frac{\Delta K}{K_n + \Delta K} x_0}_{\text{valore nodificabile (errore)}}}$$

ΔK é la perturbazione (quanto K é distante dal nominale)

Progetto invece il controllo ad anello chiuso:

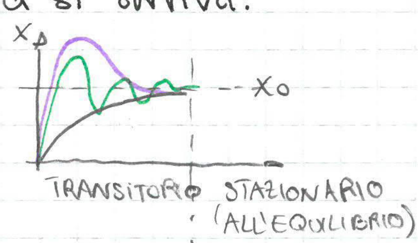
$F = -\alpha(x - x_0)$ $\quad \alpha > 0$ $\quad$ se $x > x_0 \to F < 0$; $\ x < x_0 \to F > 0$ $\qquad x = \frac{1}{K} F = \frac{1}{K}\alpha(x_0 - x) \to$

$$\to x = \frac{\frac{\alpha}{K} x_0}{1 + \frac{\alpha}{K}} x_0 = \left(1 - \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{K}}}\right) x_0$$

→ Abbiamo anche qui un errore, ma é dipendente anche da α che é del controllo

Posso rendere piccolo a piacere questo errore. Se $\alpha \to \infty$ $\quad x \sim x_0$

Mi domando quanto tempo é necessario ad arrivare al risultato e come ci si arriva:



Abbiamo la parte transitoria e quella all'equilibrio

Nel caso di anello aperto → uso info a priori sul modello

" " " " chiuso → uso info istantanea (letta sul momento)

Classificazione dei sistemi

Sistemi **statici**: y é legata algebricamente a $u \Rightarrow y = f(u)$
perciò questo é anche un legame istantaneo

Esistono sis statici tempo invarianti e tempovarianti $\rightarrow y = f(u,t)$
$\hookrightarrow y = f(u)$

es di tempo variante: $y \overset{①}{=} \sin(3t) + u$

es di tempoinvar: $y \overset{②}{=} u$ in cui $u = \sin(3t)$ $\Big] \rightarrow f = (u(t))$

c'é una dipendenza esplicita ① e una indiretta ②

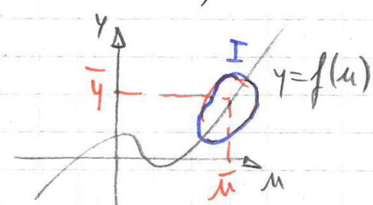
Esistono sis **SISO**: single in single out $y = f(u)$ in cui $u \in \mathbb{R}$
MIMO: multiple in multiple out $y = f(\underline{u})$ in cui $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$

Esistono sis lineari e non lineari

funzione lineare $\rightarrow \exists$ principio di sovrapp. di cause ed effetti
(si ha in uscita una comb. lin. delle var di INPUT)

Sis non lineari $y = f(u,t)$ $\hookrightarrow$ se tempo variante

Vediamo nel caso SISO (tempo invariante), la y é:



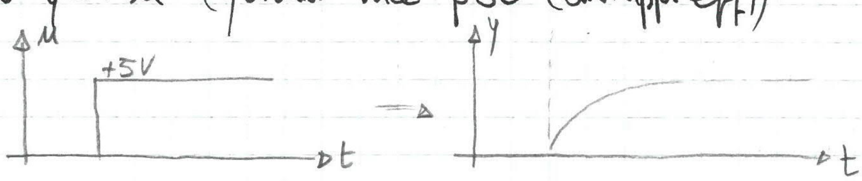
$(\bar{u}, \bar{y})$ = PTO LAVORO

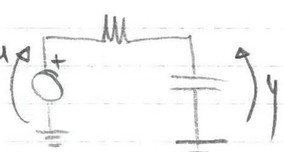
I sis statici non lineari possono essere linearizzati prefissando un pto ed un suo intorno.

$$y \cong \bar{y} + \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{\bar{y},\bar{u}} (u - \bar{u}) \qquad y - \bar{y} = \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{\bar{u}} (u - \bar{u}) \qquad \boxed{dy = \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{\bar{u}} du} \rightarrow$$

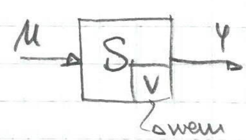
$\rightarrow$ é sis lin. del tipo $y = Ku$ (quindi vale pse (sovrapp. eff))

Vediamo un esempio

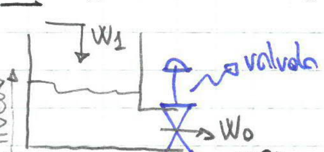




Questo non é sis statico, non é una funzione algebrica l'uscita rispetto all'entrata. É come se ci fosse una "memoria" nel sis.
Quella é la tensione ai capi di C (o la carica immagazzinata)



es: serbatoio con due portate di entrata ed uscita.



L'uscita é il livello del serbatoio. Non é sis lineare
Fisso w_1 e w_0, cosa det. algebricamente?

$Q = A \cdot h \cdot \rho$ $\Big] \rightarrow$ quantità di fluido nel serbatoio
(A = area, h = livello, ρ = densità)
~~acqua contenuta~~

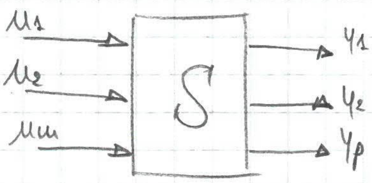
Se $W_1 = W_0 \to Q$ é costante $\to \dot{Q} = 0$

Se $W_1 > W_0 \to \uparrow Q \longrightarrow \dot{Q} > 0$ $\quad (\dot{Q} = W_1 - W_0)$

Se $W_1 < W_0 \to \downarrow Q \longrightarrow \dot{Q} < 0$ $\quad (\dot{Q} = W_1 - W_0)$

La variazione viene determinata algebricamente dagli ingressi. L'uscita h dipende staticamente da Q $\to h = y = \dfrac{Q}{A \cdot \rho}$

Sistemi dinamici



Def: variabili di stato = sono le variabili interne la cui conoscenza a $t = t_0$ é la minima info necessaria per determinare $y(t)\ \forall t \geq t_0$ noto $u(t)\ \forall t \geq t_0$

Rappresentazione di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) & \to \text{eq di stato} \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) & \to \text{// // uscita} \end{cases}$$

$u(t)$: variabili di ingresso

$y(t)$: // d'uscita

$x(t)$: // di stato $= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Classificazione dei sis dinamici

- Per vedere la temporovarianza, basta che almeno una delle eq dipenda direttamente dal tempo. In caso contrario, é tempoinv (questa é la stessa def ~~di~~ temporale per i sis statici).
- MIMO/SISO: sempre stessa def dei sis statici. (Le variabili di stato sono indipendenti da questa classificazione)
- Ordine ~~di~~ cardinalità delle variabili di stato
- Sis strettamente propri VS propri: se l'eq di uscita non dipende esplicitamente da $u \Longrightarrow$ é sis strettamente proprio

es $y(t) = 3x + 4u$

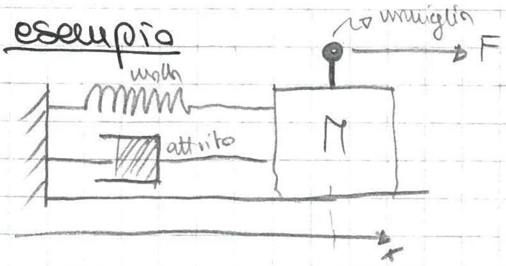
Sis lin VS Sis non lineare

Sis lin se sia f che g sono lineari in u e x

Sis. din. lin $\quad \dot{x}(t) = A(t)x + B(x)u \quad$ in cui A é mat. $\boxed{n \times n}$, B é $\boxed{n \times m}$

$y(t) = C(t)x + D(t)u \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}, \ D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

esempio



è ovviamente sis dinamico. Di che ordine?

2: ho bisogno di due variabili di stato: posizione e velocità.

$$M\ddot{x} = -c\dot{x} - Kx + u$$

Lo attrito Lo tensatica

è di ordine due perché vedo subito che non si ferma a $\dot{x}$, ma a $\ddot{x}$.

Abbiamo un'eq diff di 2° grado, da lì la determinazione dell'ordine del sis.

posizione: x_1, velocità: x_2 $\rightarrow$ $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = \ddot{x} = \frac{1}{M}(-c\dot{x} - Kx)$ con $\dot{x} = x_2$, $x = x_1$

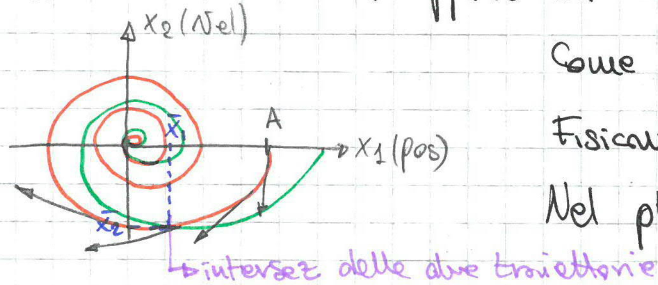
$\rightarrow$ $\dot{x}_2 = \frac{1}{M}(-cx_2 - Kx_1 + u)$ $\rightarrow$ eq diff di 1° grado

Ho ridotto l'eq di 2° grado in due del 1° grado. L'eq di uscita è $y = x_1$

È inoltre strettamente proprio e tempo invariante, SISO, lineare. Riscrivo:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{K}{m} & \frac{c}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + u\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + [0]u$$

Ho riscritto la mia rappresentazione attraverso matrici e ho un sis. lin.



Come evolve il sis in base alle condizioni di pos e vel?

Fisicamente, se $x_2 = 0$ allora $x_1 = 0$ $\rightarrow$ non succede niente

Nel pto A $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{M}x_1 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix}$

Questo grafico prende il nome di "diagramma delle fasi" e permette di capire graficamente come si evolve il sis. Cioè molto comodo per sis maggiori del 1° ordine

Nell'intersez delle due traiettorie, nel pto di intersez avrei due possibili traiettorie. Questo viola la def di variabili di stato data. E quindi?

Se x_1 e x_2 sono veramente variabili di stato, allora le due traiettorie non si possono intersecare. Devo determinare l'evoluzione del sis in maniera univoca, solo attraverso le variabili di stato

Scelta delle variabili di Stato

Dato un sis di ordine n ho infinite scelte di variabili di stato

$$\frac{d^n}{dt}y = \varphi\left(\frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}}, \ldots, \frac{dy}{dt}, y, u\right)$$ Vediamo i criteri per la scelta: $\rightarrow$ CRITERI EURISTICI

$x_1 = y$, $x_2 = \frac{dy}{dt}$, $x_3 = \frac{d^2y}{dt^2}$, $x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$ $\rightarrow$ Nel momento in cui faccio...

questa scelta, l'eq delle var. stato: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $x_n = \varphi(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, u)$

$y = x_1$ é l'eq conseguente di uscita

~~Criteri euristici~~

La var. stato é la memoria del sis, contiene l'info necessaria per ricostruire l'andamento del sistema

es: nei sis elettrici a colpo d'occhio contiamo i condensatori e induttori (che non siano indipendenti) e determiniamo l'ordine. Correnti e tensioni risp su induttore e ~~indutto~~ condensatore sono var. stato

es: nei sis ~~elettrici~~ meccanici abbiamo come var l'energia cinetica (vel) e quella potenziale (posiz)

es: nei sis termici temperatura / entalpia

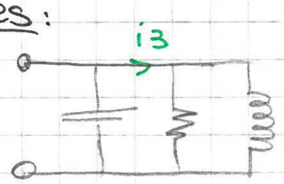
es: " " idraulici
- potenziale → pressione fluido
- cinetica → portata fluido

es

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases} \qquad X_A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 4x_2 \\ \vdots \\ 10x_n \end{bmatrix}$$

→ contiene la stessa info di X_A (é come cambiare l'unità di misura, moltiplicando per un coeff)

es:



u = corrente IN y = tensione OUT

Sis del 2° ordine $x_1 = v_C$ $x_2 = i_L$

$$\begin{cases} L\dot{x}_2 = x_1 \\ i_R = \frac{x_1}{R} \\ C\dot{x}_1 = u - \frac{x_1}{R} - x_2 \end{cases} \rightarrow ② \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{-1}{RC} x_1 - \frac{1}{C} x_2 + \frac{1}{C} u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{L} x_1 \\ y = x_1 \end{cases}$$

Scelgo ora (diversamente da prima) $x_2 = i_L$ $x_1 = i_3$

Per esprimere lo stesso sis devo modificare un attimo la situazione:

$i_R = x_1 - x_2$ $y = R i_R = R(x_1 - x_2)$ $C\dot{y} = u - x_1$ $L\dot{x}_2 = y$ → gioco un po' →

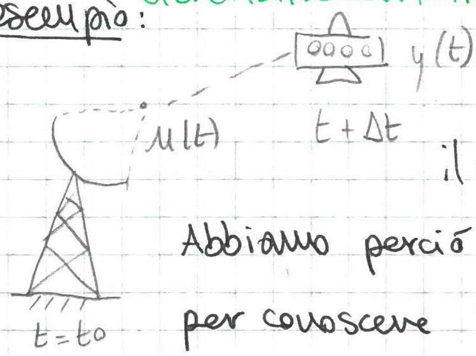
$$① \begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{R}{L}(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_1 = \left(\frac{R}{L} - \frac{1}{RC}\right) x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{RC} u \\ y = R(x_1 - x_2) \end{cases}$$

→ sono tornato ad una rappresentazione analoga a quella di prima. Queste eq ①, ② sono lo stesso sis ma con variabili di stato diverse.

Scegliendo con metodo le var di stato semplifichiamo calcoli → scelta furba

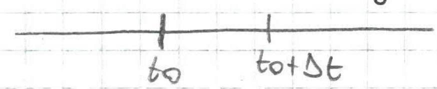
SIS. ORDINE INFINITO

esempio:



L'info emessa dall'antenna a t_0 viene ricevuta dal satellite nel tempo $t_0+\Delta t$. Prima di quell'istante il satellite riceve info mandate per $t \leq t_0$.

Abbiamo perciò una "storia" del sistema. Di che info ho bisogno per conoscere $y(t)$ tra $t_0 \leq t \leq t_0+\Delta t$?



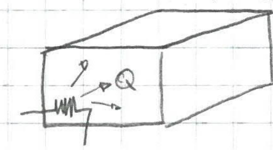
Necessito, ovviamente, di $u(t)$ $\forall t \in [t_0-\Delta t, t_0]$

Per def di var di stato, conosco già $u(t)$ da $t \geq t_0$, ma ~~~~ per analizzare il sis in quell'istante ho bisogno di sapere la "storia" precedente.

Se non conosco la storia, posso ipotizzare di avere inf variabili prima di t_0. Non è sempre vero che ci sia $u(t)$ nullo prima e dopo la trasmissione del segnale, ecco perché serve una ricostruzione di ciò che c'era in precedenza. (Le variabili possono essere infinite perché ho infiniti istanti di tempo).

1) $\exists$ sis di ordine inf 2) Solo i sis a ordine finito sono scrivibili mediante eq. stato

esempio: scatola con resistenza posizionata in un angolo



$u = Q$ (calore come ingresso)

Ipotizzo $n=1 \rightarrow$ temperatura uniforme

Se inizio a scaldare l'angolo, ho un'inf di var di stato perché ogni volumetto infinitesimale avrà una sua temperatura (il calore si diffonde piano piano nella scatola). Ho ∞^3 variabili (a causa delle coordinate x,y,z).

In questo caso sono necessarie eq. diff alle derivate parziali.

Se suppongo di dividere la temperatura che si diffonde in 4 volumi della scatola, ottengo $n=4$. Così facendo, "segmento" lo spazio, lo rendo discreto

$\dot{T} = \frac{1}{C}(Q - Q_e)$ Q = calore entrante Q_e = uscente

derivata temperatura

C capacità termica (aria) Approssimo Q a $Q = R \cdot I^2 = u$

$Q_e = K(T_{inf} - T_{ext})$

$\dot{x} = \frac{1}{C}(u - K(x - T_e))$ $y = x$ T_e = disturbo

Def Dato un sis dinamico, noti $x(t_0) = x_0$ e $u(t)$ $\forall t \geq t_0$, si def

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ y = g(x,u,t) \end{cases}$$

- il movimento dello stato, la soluzione $x(t)$ $t \geq t_0$
- il movimento dell'uscita, la sol. $y(t)$ per $t \geq t_0$

In analisi, il movimento dello stato è l'int. gen dell'eq di stato, mentre il movimento d'uscita è la sol. finale con l'int. gen (protratto nel tempo)

Considero ora un sis dinamico tempoinv: sono varianti al v. assoluto del tempo. Perciò conviene avere $t_0 = 0$ (*)

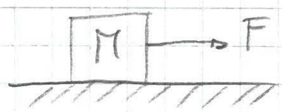
Def movimenti di eq (per sis. din. tempinv): dato un sis din tempinv:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases}$$ con $u(t) = \bar{u}$ $\forall t \geq t_0 = 0 \rightsquigarrow$ (*)

Si dice stato/movimento ~~di equilibrio~~ dello stato di equilibrio la condiz. iniziale $x(t) = \bar{x}$: $x(t) = \bar{x}$ $\forall t > 0$. Analogamente, il movimento di uscita di eq è $y(t) = \bar{y}$: $y(t) = \bar{y}$ $\forall t > 0$ $\rightarrow$ devono esistere per prendere il nome di movimento

Oss: non è detto che gli stati di eq esistano

es:

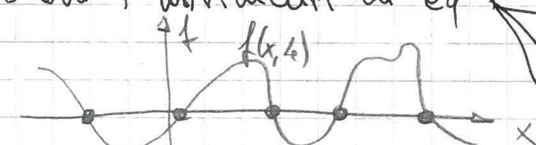


$x = \begin{bmatrix} POS \\ VEL \end{bmatrix}$

Se ho forza costante non nulla, $\exists$ stato init tc se metto il sis in quello stato, esso rimane in quello stato? No, il sis si sposta con F=cost

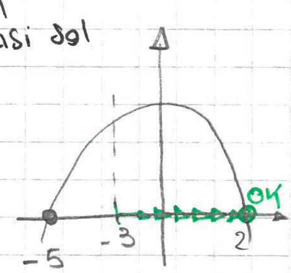
$f(\overbrace{\bar{x}}^{\text{cercato}}, \underbrace{\bar{u}}_{\text{dato}}) = 0 \rightsquigarrow$ se lo risolvo, trovo i movimenti di eq
- $\nexists$ sol
- $\exists \infty$ sol
- 1! sol
- qualsiasi sol

es: $n = 1$ $\dot{x} = f(x,u)$ $\bar{u} = 4$



Ho 5 equilibri (quando $f = 0$)

Se pongo $\bar{x}$ tc $f = 0$ sono già in eq. Ma se non è in eq?



Nel disegno, se parto da $\bar{x} = -3$, so già che $\bar{x}$ si sposta, so che x cresce (peso trascinato) e quindi va verso ~~des~~ destra, fermandosi a 2 "rimanendo intrappolato" nello stato di eq.

Vediamo il caso di sis. lineari

Sis lin tempinv (LTI)

$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ impongo $0 = Ax + B\bar{u}$ nel caso di $u(t) = \bar{u}$

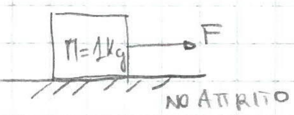
Ottengo $Ax = -B\bar{u}$] → sis lineare risolvibile algebricamente

se $\det A \neq 0 \iff \exists!$ equilibrio $\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$

se $\det A = 0 \iff \to \infty$ sol

$\searrow \nexists$ sol

es



$\ddot{x} = F$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\det A = 0$

Se $\bar{u} = 0$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$ → $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = \text{qualsiasi} \end{cases}$ → ho 1 sola eq

ma mi serve per l'eq

arbitrariamente

Qualunque C.I caratterizzata da x_2 (velocità) $= 0$ é un eq → $\exists\ \infty$ equilibri.

se $\bar{u} = 1$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \bar{u} \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 0 \\ 0 = \bar{u} \end{cases}$ → $\nexists$ soluzione, le eq non vanno d'accordo

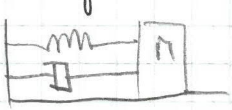
$0 = n°\text{cost} \neq 0$] → assurdo

Riassunto stato di eq

$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases}$ considero $u(t) = \bar{u}$ costante, lo stato di eq $\bar{x} : x(t) = \bar{x}\ \forall t \geq 0$

uscita di eq é y corrispondente a $\bar{x}, \bar{u} \Rightarrow \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$

esempio



$u(t) = \bar{u}$ costante

$y = x_1$

$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{M}x_1 - \frac{c}{M}x_2 + \frac{1}{M}u \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 0 \\ -\frac{K}{M}x_1 - \frac{c}{M}x_2 + \frac{1}{M}\bar{u} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -\frac{K}{M}x_1 + \frac{1}{M}\bar{u} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = \frac{1}{K}\bar{u} \end{cases}$] → equilibrio

Formula di Lagrange

É un'espressione analitica per il movimento di sistemi LTI

$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ $x(t_0) = x_0$ ho ~~ba~~ bisogno inoltre di $u(t)\ \forall t \geq t_0$

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{*} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}B \cdot u(\tau)\, d\tau}_{*}$$

$$y(t) = Ce^{At} + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot Bu(\tau)\, d\tau + Du(t)$$

Calcolo di un movimento per sis LTI data $x(t_0)$. é la sol di un'eq diff

$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \ldots = \sum_{q=k}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$ in cui A é una matrice

* movimento libero (é presente solo la CI x_0)

↳ dipende solo da CI x_0

* movimento forzato (é presente solo l'ingresso (forzato dall'esterno))

↳ dipende solo da $u(t)$

Per il movimento libero e forzato le dipendenze sono lineari, perché uno è solo un coeff che moltiplica, l'altro è all'interno dell'integrale, perciò la variaz può essere solo lin.

Indico libero/forzato con i pedici X_L e $X_{F(t)}$

~~es $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$~~ $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ .... ? copia

es: $\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) + 4u(t) \\ y(t) = 5x(t) + 3u(t) \end{cases}$ CI $x(0) = 2$ $u(t) = e^{-t}$

? movimento stato ? uscita Applico Lagrange:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau =$$

$$= e^{3t} \cdot 2 + \int_0^t e^{3(t-\tau)} \cdot 4 \cdot e^{-\tau} d\tau = 2e^{3t} + 4\int_0^t e^{3t-4\tau} d\tau =$$

$$= 2e^{3t} + 4e^{3t}\left[-\frac{1}{4}e^{-4\tau}\right]_0^t = 2e^{3t} - \cancel{4}\frac{}{\cancel{4}} e^{3t}(e^{-4t} - \underbrace{e^{0}}_{1}) = 3e^{3t} - e^{-t}$$

Abbiamo trovato il movimento dello stato. Facciamo la prova del 9, differenziamo ciò che abbiamo trovato $\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(3e^{3t} - e^{-t})}{dt} = 9e^{3t} + e^{-t}$

Sost $x(t)$ in $\dot{x}(t) = (9e^{3t} + 3e^{-t}) + 4e^{-t} = 9e^{3t} + e^{-t}$

$y(t) = 5(3e^{3t} - e^{-t}) + 3e^{-t} = 15e^{3t} - 2e^{-t} \rightarrow$ movimento uscita

Sovrapposizione degli effetti

$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$ $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $u \in \mathbb{R}^1$ $y \in \mathbb{R}^1$ è un sis SISO

caso 1. $u(t) = 0$ $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ho due metodi

1) $e^{At}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 1.2) Chiamo $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ scorporo in 2 vettori

Poiché vale sovrapp effetti: $x(t) = e^{At}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{At}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

posso anche scrivere $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

caso 2. $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $u(t) \neq 0$

1) $X_F(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$ 1.2) Scompongo $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ in 2 funzioni

es $u(t) = 4\,\text{sen}(\omega t) = \underbrace{2\,\text{sen}(\omega t)}_{u_1} + \underbrace{2\,\text{sen}(\omega t)}_{u_2} \rightarrow X_F(t) = \int_0^t e^{-A(t-\tau)} B \cdot 2\,\text{sen}\,\omega\tau\, d\tau +$

$\int_0^t e^{-A(t-\tau)} B\, 2\,\text{sen}\,\omega\tau\, d\tau$

Caso 3. $x(0)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ $u(t)=\underbrace{3\,\text{sen}(t)}_{u_1(t)}+\underbrace{5\cos(t)}_{u_2(t)}$ $\Big] \to$ Abbiamo sia ingresso che C.I.

$$X(t)=X_L(t)+X_{F1}(t)+X_{F2}(t)$$

$X_L \to$ causato da $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ $X_{F1} \to$ causato da $u_1(t)$ $X_{F2} \to$ causato da $u_2(t)$

Perciò possiamo vedere come trattare i sis MIMO:

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\end{cases}$$

Consideriamo il sis strettamente proprio. Posso a rigori applicare la formula di Lagrange, OPPURE usare la sovrapp cause ed effetti:

$$\underbrace{\dot{x}=Ax\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\end{bmatrix}u_1}_{\Downarrow\; x_A(t)} \qquad \underbrace{\dot{x}=Ax\begin{bmatrix}b_{12}\\b_{22}\end{bmatrix}u_2}_{\Downarrow\; x_B(t)}$$ ottengo due SISO

$\Big] \to X(t)=X_A(t)+X_B(t)$

Rappresentazioni equivalenti

$$\dot{x}=Ax+Bu=Ax+\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$ sovrapp

① $\dot{x}=Ax+\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\end{bmatrix}u_1$

② $\dot{x}=Ax+\begin{bmatrix}b_{12}\\b_{22}\end{bmatrix}u_2$

Secondo Lagrange $x(t)=\underbrace{e^{At}x_0}_{CI}+\int_0^t \underbrace{e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau}_{\text{ingresso}}$

$$X(t)=X_L(t)+X_{F_{u_1}}(t)+X_{F_{u_2}}(t)$$ ① ②

L = movimento libero
F = " forzato

$X_L \to$ consid. $x(0)=x_0$

$X_{F_{u_1}}, X_{F_{u_2}} \to$ considerando CI nulle $\to x(0)=0$ $\Big] \to$ *

*Dobbiamo essere sicuri di non considerare la condiz. init per più di 1 volta.

Se ci limitiamo a sis LTI $\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\y=Cx+Du\end{cases}$ Quando cambiamo le var di stato, decidiamo un nuovo vettore chiamato $z\in\mathbb{R}^n$ $\to$ stesso ordine del vettore x

$z=h(x)\longrightarrow z=Tx$ $T\in\mathbb{R}^n$ es: (T è una nuova mat. di rappresentazione). ed è una mia scelta

$n=2 \longrightarrow$ $\begin{matrix}z_1=t_{11}x_1+t_{12}x_2\\z_2=t_{21}x_1+t_{22}x_2\end{matrix}$ $\Big] \to z=Tx$

Devo stare attento a mantenere un $\det T\neq 0$ (sennò non avrebbe utilità)

$z=Tx$ $x=T^{-1}z$ $\dot{x}=T^{-1}\dot{z}$ $\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\y=Cx+Du\end{cases}$ $\begin{cases}T^{-1}\dot{z}=AT^{-1}z+Bu\\y=CT^{-1}z+Du\end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{z} = TAT^{-1} z + TBu \\ y = CT^{-1} z + Du \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{z} = \tilde{A} z + \tilde{B} u \\ y = \tilde{C} z + \tilde{D} u \end{cases} \quad \text{dove} \quad \tilde{A} = TAT^{-1} \quad \tilde{B} = TB \quad \tilde{C} = CT^{-1} \quad \tilde{D} = D$$

Sono passato da un sis all'altro con var. stato diverso. La relazione ingresso/uscita è del tutto identica tra i due sis.

Perciò dato un sis, ∃ un ∞ modi di rappresentare il sis (ovvero scegliere A, B, C, D)

Per calcolare l'exp di mat cerco una diag $T_D A T_D^{-1} = A_D \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} \qquad \begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n = \lambda_n z_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} x_1 + \dots \\ \dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 - - - \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \vdots \; - - - - \end{cases}$$

__es__: matrice triangolare

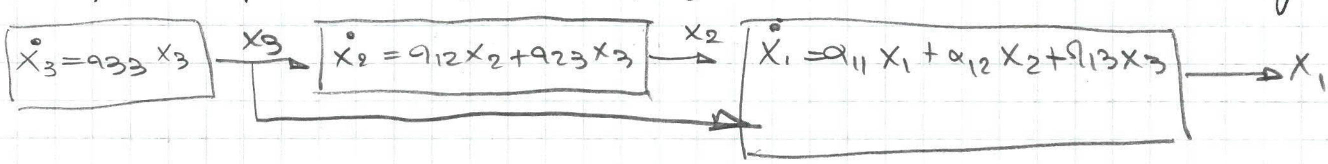
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \left. \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \dot{x}_2 = a_{12} x_2 + a_{23} x_3 \\ \dot{x}_3 = a_{33} x_3 \end{cases} \right] \rightarrow \text{le eq non sono disaccoppiate}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix} \qquad x_3(t) = e^{a_{33} t} x_{30}$$

$\hookrightarrow \dot{x}_2 = a_{22} x_2 + a_{23} x_3$ $\quad x_3$ è noto, è ingresso

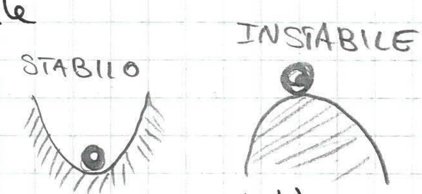
$$x_2(t) = e^{a_{22} t} x_{20} + \int_0^t e^{a_{22}(t-\tau)} a_{23} x_3(\tau) \, d\tau$$

$\dot{x}_1(t) = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$ $\quad x_2, x_3$ sono noti e considerati come ingressi



- Sistemi diagonali — calcolo scalare parallelo
  - // triangolari — calcolo scalare è sequenziale

Stabilità



Vediamo prima intuitivamente la stabilità del sistema

Ci sono due tipi di stabilità:
- stab. alla Lyapunov (legata agli stati)
- stab ingresso/uscita

Def: norma euclidea $x \in \mathbb{R}^n$ $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}$

Def: intorno circolare di $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e di raggio r $(B_r(x_0))$ $\quad x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r$

$\dot{x} = f(x(t), u(t))$ considero $u(t) = \bar{u} \; \forall t \geq 0$ (costante)

$x(0) = x_{0n}$ (condizione iniziale nominale) Considero x_{0n} equilibrio

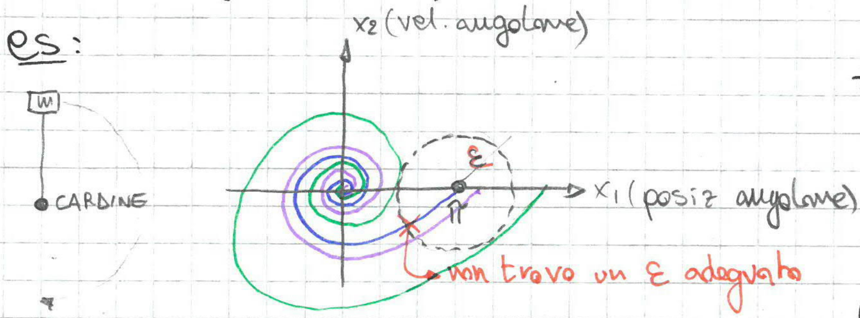
Perciò se X_{0n} è equilibrio $x(t) = X_{0n}$.

Invece $x(0) = X_{0p} \neq X_{0n}$ (condizione iniziale perturbata)

Il movimento X_{0n} si dice stabile se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x_{0p} \quad \|X_{0p} - X_{0n}\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|x_p(t) - X_{0n}\| < \varepsilon \quad \forall t \quad (*)$$

es:



Abbiamo un pendolo in posizione di equilibrio. È instabile? Sì perché ho trovato un ε per cui non è valida la condiz di stabilità

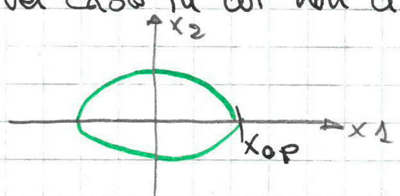
le diverse traiettorie mostrano come le variabili di stato si comportano

Def: un equilibrio è instabile se non è stabile

Def: il movimento è asintoticamente stabile $(*)$ $\lim_{t \to \infty} \|X_p - X_{0n}\| = 0$

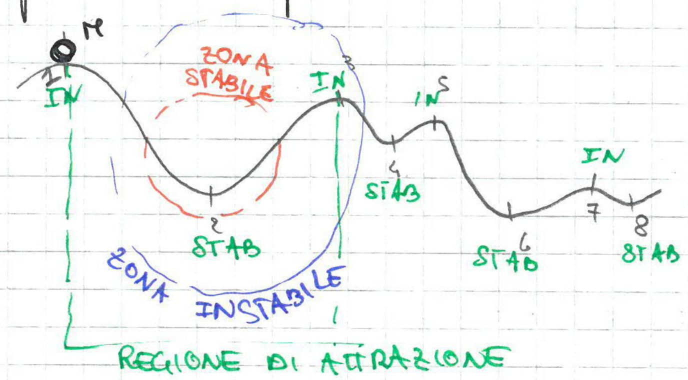
le traiettorie convergono verso l'eq

Nel caso in cui non ci siano dissipazioni di alcun tipo ($\vec{F}_{peso}$ nel pendolo):



Il punto finale = pto init

es: abbiamo 8 eq:



Bacino/regione di attrazione di equilibrio asintoticamente stabile:

$X_0 \in \mathbb{R}^n$: $\lim_{t \to \infty} \|X_{0p} - X_{0n}\| \to 0$ Mi interessa che esista questo bacino quando parlo di stabilità

LTI (Stabilità)

$\dot{x} = Ax + Bu$ 1) Fissiamo $u(t) = \bar{u}$ → moviм equil nominale (X_{0n}); $X(0) = X_{0p} \to x(t) = x_p(t)$ movim perturbato

$\dot{x}_n = A x_n + B\bar{u}$ con $x_n(0) = X_{0n} \to X_n(t) = x_{0n}$

$\dot{x}_p = A x_p + B\bar{u}$ con $x_p(0) = X_{0p}$ (Stiamo considerando $B = \text{cost}$)

$x_p(t) - X_n = \delta x$ $\quad \dot{x}_p - \dot{x}_n = A(x_p - x_n) + \underline{B(\bar{u} - \bar{u})}$ → sostituisco

sost

$\boxed{\dot{\delta x} = A\,\delta x}$ sis LTI diverso da quello di partenza, descrive/caratterizza la stabilità

$\delta x(0) = x_{op} - x_{on}$ = perturbazione iniziale

δx rappresenta la distanza dall'equilibrio. Se
$\uparrow \delta x \rightarrow$ inst
$\downarrow \delta x \rightarrow$ asint stabile
$\delta x = cost \rightarrow$ semplice stabile

Il sis $\delta \dot{x} = A \delta x$ non dipende dall'ingresso

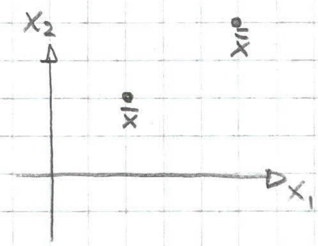
L'equilibrio non dipende da u, oppure in maniera differente, non dipende da B. L'andamento non dipende da $\delta x_n(0)$. Di conseguenza:

1) nel caso di sis LTI: l'ingresso non influenza la stabilità, B non influenza la stabilità, perciò la stabilità dipende solo da A.

La stabilità non dipende dall'equilibrio $\Rightarrow$ stabilità del sistema (posso dire ciò solo nel caso dei sis LTI)

Se A è Asint. stab. $\Rightarrow$ il bacino di attrazione è $\mathbb{R}^n$

LTI AS (Asintoticamente Stabili)



1) Se sposto il sis dall'equil, ritorna all'eq

2) Dato $\bar{u} = cost \Rightarrow \exists!$ equilibrio $\rightarrow$ uno e un solo equilibrio

DIM (per assurdo): $\bar{x} \neq \bar{\bar{x}}$ $\quad \bar{x}, \bar{\bar{x}}$ sono entrambi equilibri

Se lascio evolvere il sis liberamente non posso avere 2 eq.

Avere 1! eq vuol dire che $\det A \neq 0$, perché $\dot{x} = Ax + Bu \rightarrow Ax = -B\bar{u}$
quell'eq ammette 1! soluz quando $\det A \neq 0$.

Posso dire che se $\det A = 0 \Rightarrow$ SIS NON AS (non ~~è~~ esiste 1 solo eq)

$AS \Rightarrow \exists!$ eq $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

3) Il movimento dipende Asint solo da $u(t)$ $(t \rightarrow \infty)$
$$x(t) = \underbrace{e^{At} x_0}_{\rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow \infty \text{ se sis AS}} + \overbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}^{\text{dipende da } u(t)}$$

4) Se applico $u(t) = \begin{cases} \text{qualsiasi} & 0 \le t < \bar{t} \\ 0 & t \ge \bar{t} \end{cases} \rightarrow y(t) \rightarrow 0$
$\hookrightarrow$ è un altro modo per dire che è AS

5) Dato un ingresso limitato $\Rightarrow$ uscita limitata $\underbrace{|u(t)| \le K \ \forall t}_{\text{input limitato}} \Rightarrow \underbrace{\exists h : |y(t)| \le h \ \forall t}_{\text{uscita limit}}$

La stabilità si suddivide in $\rightarrow$ interna (delle var. di stato)
$\rightarrow$ I/O $\rightsquigarrow$ pto 5

Sistemi LTI instabili

1) $\exists x_0 : e^{At} x_0 \longrightarrow \infty$ (la divergenza non si verifica per forza per tutte le CI)

2) $u(t) = \bar{u}$ e $x(0) \neq$ equilibrio $\Longrightarrow$ Lo stato $x(t)$ diverge (basta una variabile di stato che diverge per dire che lo stato diverge)

es:

$\dot{x}_1 = x_1 \quad \dot{x}_2 = -x_2 + u \quad y = x_2 \quad u = \bar{u}$ costante

$x_1(t) = e^{t} x_{10}$

$x_2(t) = e^{-t} x_{20} + \bar{u}(1 - e^{-t})$

$y = x_2$

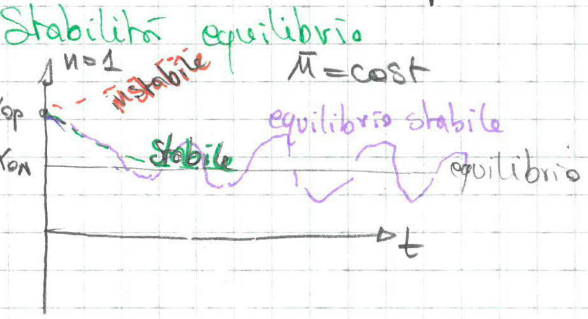
CI $\begin{cases} x_{10} = 0 \\ x_{20} = \bar{x} \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} x_1(t) \to 0 \\ x_2(t) \to \bar{x} \\ y \to \bar{\bar{y}} \end{matrix}\right]$ converge

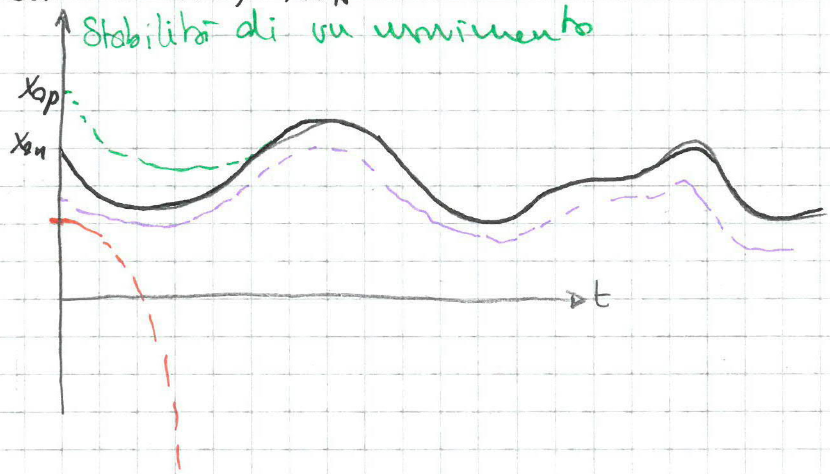
CI $\begin{cases} x_{10} = 1 \\ x_{20} = 2 \end{cases}$ $\left.\begin{cases} x_1(t) = e^{t} \\ x_2(t) = e^{-t} \cdot 2 + \bar{u}(1 - e^{-t}) \end{cases}\right] \to$ diverge

Non c'è equivalenza tra stabilità interna e relazione I/O

Stabilità di un movimento

Invece di considerare $x_N(t) = x_N$ (equilibrio) passo a $x_N(t) =$ tempvar, ovvero il movimento di $\dot{x} = f(x, u_N)$ con CI $x(0) = x_{0N}$





Riassunto

SIS NON LIN $\longrightarrow$ proprietà di stabilità o equilibri di movimenti

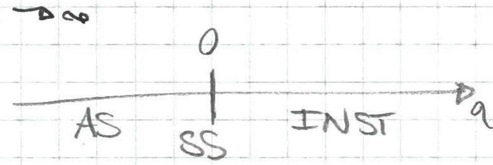
SIS lin $\longrightarrow$ proprietà di stabilità del sistema $\longleftrightarrow$ alle caratteristiche di A

$\delta\dot{x} = A\,\delta x$ dove $\delta x(t) = x_p(t) - x_N(t)$

Posso dividere le caratteristiche di A in
- AS $\lim_{t \to \infty} |e^{At}| = 0$
- instabile $\lim_{t \to \infty} |e^{At}| = +\infty$
- semplicemente stabile $\lim_{t \to \infty} |e^{At}| = c \neq 0$

es:

$n = 1 \quad \delta\dot{x} = a\,\delta x \quad \lim_{t \to \infty} e^{at}$ $\begin{cases} a < 0 & \text{AS} \\ a > 0 & \text{INST} \\ a = 0 & \text{SEMPLIC. ST. (SS)} \end{cases}$



$n>1$ consideriamo la stabilità per casi maggiori di 1

↳ A diagonalizzabile $\quad z = Tx \quad \dot{z} = A_D z$

$$A_D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \lambda_2 & \\ \underline{0} & & \ddots \lambda_n \end{bmatrix} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n = \lambda_n z_n \end{array}\right] \longrightarrow \text{se } \lambda_i < 0 \ \forall i \Longrightarrow AS$$

se $\exists \lambda_i > 0 \Longrightarrow$ INSTABILE

se $\exists \lambda_i \leq 0 \Longrightarrow SS$

Vediamo con A non diag ma triangolare a blocchi:

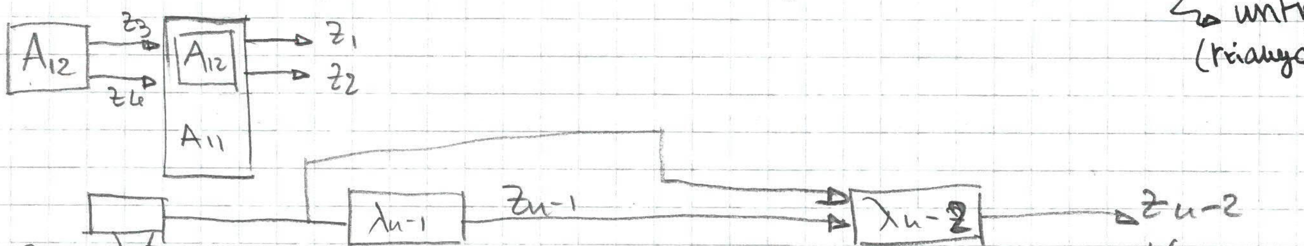
$\dot{x} = Ax \quad z = Tx \quad \det(T) \neq 0$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ & A_{22} & A_{n\cdot\cdot} \\ \underline{0} & & A_{nn} \end{bmatrix} z$$

A_{11} sono matrici:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

↳ matrici (triangolare a blocchi)



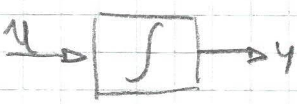
$z_n = e^{\lambda_n t} z_{0n} \qquad \dot{z}_{n-1} = \lambda_{n-1} z_{n-1} + a_{n-1,n} z_n \qquad \dot{z}_{n-2} = \lambda_{n-2} z_{n-2} + h(z_n, z_{n-1})$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_n < 0 \\ \lambda_{n-1} < 0 \\ \lambda_1 < 0 \end{array}\right\} AS$$

Se $\exists \lambda_i > 0 \Longrightarrow$ instabile (cresce tutto a catena, ciò crea l'instabilità)

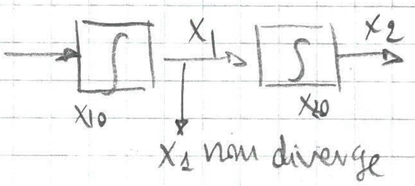
Se ho un autovalore $\exists! \lambda = 0$ e tutti gli altri < 0:

considero due autovalori $\lambda = 0$ consecutivi (es $\lambda_{n-5}, \lambda_{n-6} = 0$)



$\dot{x} = 0x + u \qquad \int_0^t \dot{x}\,dt = \int_0^t u\,dt \qquad x(t) - x(0) = \int_0^t u(\tau)\,d\tau$

$x(t) = x(0) + \int_0^t u(\tau)\,d\tau \qquad$ Se ne metto due in serie



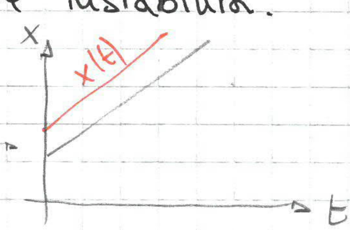
Con x_{20} sto integrando un valore costante ⟶ diverge

Se, quindi, ho 1 autovalore nullo ⟶ SS

Se ne ho due consecutivi corro il rischio di avere instabilità.

Se $\dot{x} = u$ con $u = 0$ ⟶ equil $x = 0$

con $\bar{u} \neq 0$ cost $x(t) = x_0(t) + \bar{u}t$ ⟶



pur crescendo indefinitamente $x(t)$, non si allontana dalla traiettoria nominale che sto studiando, δx rimane costante ⟶ SS

Se, ancora, ne metto due insieme integro la 2ª cost. e x_2 diverge.

Def più appropriata di modi di un sis (Ripasso)

$\dot{x} = Ax + Bu$ $\quad$ A è diagonalizzabile $\quad A_D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \lambda_n \end{bmatrix}$

Possiamo calcolare i modi con la form. Lagrange, in cui compare l'exp di mat.

In base ai casi, posso calcolare l'exp di mat. $e^{At} = T_D^{-1} e^{A_D t} T_D$

$e^{At} =$ ~~com~~ scrivibile come comb lin (dettata da T_D^{-1} e T_D) di termini $e^{\lambda_i t}$

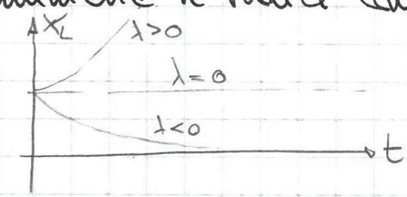
$e^{\lambda_i t} \rightarrow$ modi del sis

So che x_L è anch'esso una comb lin di e^{At} e la cond. init,

perciò i modi del sis rappresentano i "mattoncini fondamentali" che vanno a costituire il comportamento del sistema. So che $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\det(\lambda I - A) = 0$ ammette n radici complesse

- se $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow e^{\lambda_i t}$



$\lambda_i < 0$ $\quad e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$

$\lambda_i = 0$ $\quad e^{\lambda_i t} \rightarrow cost$ per $t \rightarrow \infty$

$\lambda_i > 0$ $\quad e^{\lambda_i t} \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \infty$

Se tutti i modi tendono ~~ad un valore min~~ a zero $\rightarrow x_L$ non può far altro che tendere a zero perché è comb. lin

Se anche solo 1 diverge allora x_L diverge e così via

- Se $\lambda \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ (se risolvo una radice ~~trovo~~ trovo sempre complessi coniugati)

Ha senso per i numeri complessi parlare di segno di numero complesso?

No. È necessario trovare un'ulteriore definizione:

posso scrivere $e^{\lambda t} = e^{\sigma t}[\cos(\omega t) \pm j \sin(\omega t)]$
in cui $\lambda \in \mathbb{C}$

cioè quando calcolo T_D^{-1} e T_D

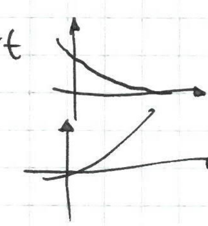
Dato che ho complessi coniugati, facendo una comb. lin sparisce il complesso.

La parte importante del modo complesso perciò è la parte reale $e^{\sigma t}$

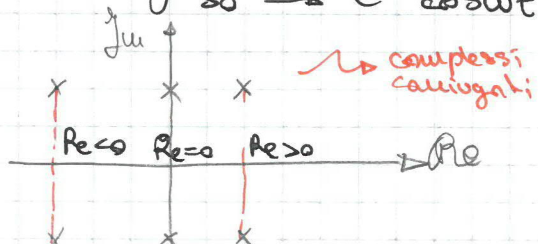
$\sigma = 0 \rightarrow \cos\omega t$

$\sigma < 0 \rightarrow e^{\sigma t} \cos\omega t$ in cui $e^{\sigma t}$

$\sigma > 0 \rightarrow e^{\sigma t} \cos\omega t$ in cui $e^{\sigma t}$



↳ Ho sbagliato la frequenza nel disegno, sono in realtà tutte uguali (stessa ω)



Criteri degli autovalori

Dato $\dot{x} = Ax + Bu$

Teorema: il sis è AS $\Longleftrightarrow$ $Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i$

Teorema: se $\exists i : Re(\lambda_i) > 0 \Longrightarrow A$ è instabile (Oss: non vale il contrario)

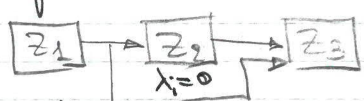
questo è il caso in cui uno dei modi è instabile $\Rightarrow$ comb lin inst $\Rightarrow$ sis inst

Teorema: se $Re(\lambda_i) \leq 0$ e $\forall i : Re(\lambda_i) = 0,\ m_a = m_g \Longleftrightarrow A$ è s.s.

(ovviamente se anche un solo $\lambda_i = 0$ ha $m_a \neq m_g \Rightarrow$ sis inst)

Quest'ultimo Th si basa sulla diagonalizzazione di A. Infatti se A è diagonalizzabile, il sis non tornerà alla condiz iniziale, alcuni stati non torneranno alla condiz init ma rimarranno perturbati ma limitati.

In altri casi devo triangolare la matrice



$z = Tx$
$\dot{z} = A_D z$

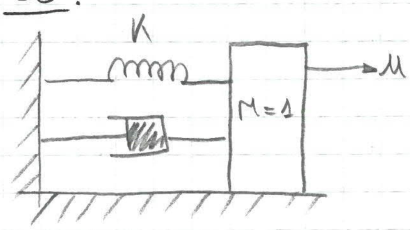
In questo caso con un autovalore nullo abbiamo il comportamento da integratore. Nel caso di z_2 integratore (ha $\lambda_i = 0$) $\dot{x} = 0x + u \quad x = \int_0^t u(\tau)d\tau$

Se infilo in z_2 una costante, l'integratore me la fa divergere.

Quindi z_1 non deve fornire costanti $\rightarrow z_1$ non deve essere integratore.

La divergenza però non è in maniera <u>exp</u> ma <u>lineare</u> $\rightarrow$ <u>INST. DEBOLE</u>

<u>es</u>:



$\ddot{x} = -Kx - c\dot{x}$
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -Kx_1 - cx_2 + u \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & -c \end{bmatrix} \quad \det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ K & \lambda + c \end{bmatrix}$$

$\det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda + c) + K = 0 \qquad \Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + c\lambda + K = 0 \quad \lambda_{12} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4K}}{2}$

- $K = 0, c = 0$ (no molle e no attrito) $\Longrightarrow \lambda_{12} = 0$

  $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2$ se $\Delta_A(\bar{\lambda}) = 0$ calcolando gli autovalori trovo che $m_a \neq m_g$ e quindi il sis è instabile

Vediamo un'osservazione sul polinomio minimo annullante:

Oss: POL. MIN. ANNULLANTE

Data A con autovalori λ_i, dire che $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ equivale a dire che λ_i é radice semplice del polinomio minimo annullante.

$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$ → posso scriverlo raccogliendo le sue radici:

$$\circledast \overset{!}{=} (\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1}(\lambda-\lambda_2)^{\alpha_2} \dots (\lambda-\lambda_K)^{\alpha_K}$$

Cosí rappresento i termini che hanno ~~...~~ α_i = molteplicitá algebrica

$K = n \Leftrightarrow a_i = 1 \ \forall i$ → tutti gli autovalori hanno $m_a = 1$

Δ_A = pol. caratteristico

Ho scritto il polinomio caratteristico in maniera diversa.

Esso é anche il polinomio annullante per $A \rightarrow \Delta_A(A) \equiv 0$ → mat. nulla

se sost a λ dell'espressione $\circledast$ la matrice A trovo la matrice nulla

$\psi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{b_1}(\lambda-\lambda_2)^{b_2} \dots (\lambda-\lambda_K)^{b_K}$ → polinomio minimo annullante,

La base é identica rispetto al pol. caratteristico. Quello che cambia é la molteplicitá algebrica b_K rispetto ad a_K.

Se $b_i = 1 \Leftrightarrow \lambda_i$ é radice semplice $\Rightarrow \psi(A) = 0$

ed in particolare é il polinomio di grado minore ~~...~~ di tutti gli annullanti.

Se la radice che mi interessa compare come radice semplice → $m_a = m_g$

Come trovo ψ? So di sicuro che Δ_A é annullante, perció parto da lí e scendo di grado. Nel mio caso ho bisogno di sapere che $b_i = 1$ e nient'altro, cosí posso controllare la molteplicitá algebrica rispetto a quella geometrica

es:

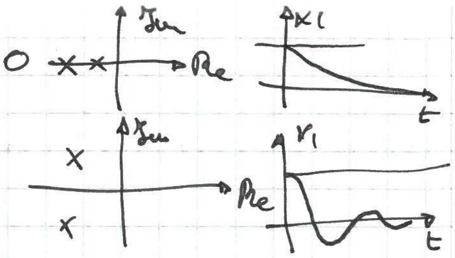
$\Delta_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$ é il pol. min. annullante?

candidato 1) $(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ candidato 2) $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ candidato 3) $(\lambda-1)(\lambda-2)$

Sostituisco $\lambda = A$ e faccio i conti e vedo quando ottengo zero

Torniamo all'esercizio precedente

- $K>0,\ c>0$ $\qquad \lambda_{12} = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2-4K}}{2}$ $\quad$ ① $c^2-4K \geq 0$ $\quad$ ② $c^2-4K<0$

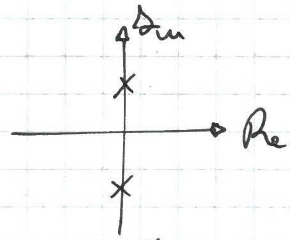


In entrambi i casi vedo che $Re<0$ perciò ho stabilità. ①: tiro la molla, la massa va direttamente a zero (Attrito molto elevato)
②: tiro la molla, sistema ~~oscilla~~ oscilla e si ferma (Attrito dà contributo minore rispetto a ①)

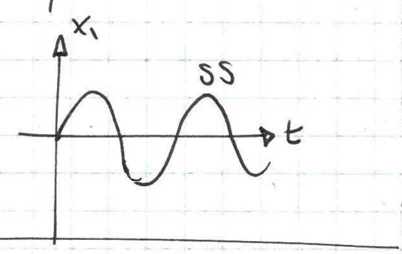
Fisicamente: ① l'attrito dà un componente così forte che non si ha abbastanza inerzia per sovraelongare

- $C=0,\ K>0$ (no attrito) abbiamo zero attrito quindi la molla è libera di oscillare senza mai fermarsi $\rightarrow$ SS

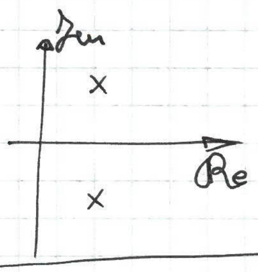
$\lambda = \pm \dfrac{\sqrt{-4K}}{2} = \pm\sqrt{-K}$ $\rightsquigarrow$ $Re=0$ $\rightarrow$ complex coniugati sull'origine

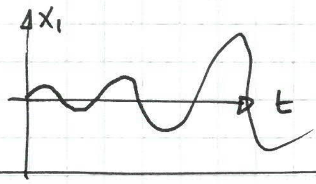


Ovviamente ho $m_a = m_g = 1$ $\Rightarrow$ SS



- $c<0,\ K>0$ $\rightsquigarrow$ ~~...~~ attrito negativo? Invece di frenare accelera $\quad \lambda_{1,2} = \underbrace{-\dfrac{c}{2}}_{>0} \pm \dfrac{\sqrt{c^2-4K}}{2}$ $\rightsquigarrow$ $Re>0$ $\rightarrow$ INSTABILE





Il calcolo degli autovalori per matrici più grandi di 3x3 diventa tedioso.

es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 32 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & a & 10 \\ 4 & b & 4 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad$? per quali valori di a,b il sis è AS?

Con calcolatrice o a mano è un suicidio calcolarne gli autovalori.

Ci sono modi per analizzare la stabilità senza il calcolo degli autovalori

Analisi STABILITA' senza il calcolo degli autovalori

Regola 1) Se A è triangolare $\rightarrow$ gli autovalori sono sulla diag. principale di conseguenza non ho bisogno di calcolarli (Oss: vale anche per le mat. a blocchi) $\rightsquigarrow$ $\left\{\text{autovalori triang a blocchi } \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\right\} = \left\{\text{autoval}[A_{11}] \cup \text{autoval}[A_{22}]\right\}$

Regola 2) $\underbrace{Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$ dove $Tr = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ $\rightarrow$ la traccia è uguale alla somma degli autovalori

data $Tr(A) > 0$ $Tr = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ se $Tr(A) > 0 \Rightarrow A$ instabile

Regola 3) $\underbrace{\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i}$ condiz. necessaria per avere AS è che $\det A \neq 0$

AS $\Rightarrow \det A \neq 0$ oppure se $\det A = 0 \Rightarrow$ sis non AS

Regola 4) Criterio di Routh-Horwitz

data $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Longrightarrow \Delta_A(\lambda) = \alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$

tutte le radici di $\Delta_A(\lambda) = 0$ hanno $Re(\lambda) < 0$ (*) $\Leftrightarrow$ gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono diversi da zero e concordi.

(*) ciò vuol dire che il sis è AS

$$\Delta_A(\lambda) = \alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \alpha_3 \lambda^{n-3} + \dots + \alpha_n$$

La tabella di Routh è una tabella di $n+1$ righe:

$\rightarrow$ 1ª colonna

α_0	α_2	α_4	α_6	(indici pari, mettiamo zero quando non c'è l'indice)
α_1	α_3	α_5	α_7	(indici dispari, " " " " ")
⋮				
h_1	h_2	h_3		
k_1	k_2	k_3		
	l_i			

$$l_i = -\frac{1}{k_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ k_1 & k_{i+1} \end{bmatrix}$$

Costruisce un algoritmo così fatto

H, K sono elementi già calcolati attraverso la formula l_i. Mi baso sulle due righe superiori per calcolarne il valore attuale l_i. Procedo fino a costruire $n+1$ righe es: $\Delta_A = \alpha_0\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_2$ ~ sis del 2° ordine

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1(\alpha_2) & h_2 & & \end{matrix}\right\| \qquad h_1 = -\frac{1}{\alpha_1}\det\left(\begin{bmatrix}\alpha_0 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0\end{bmatrix}\right) = +\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_2\alpha_1) = \alpha_2$$

h_2 non è necessario perché sono già in $n+1$ righe

Noto che nella 1ª colonna c'è α_0, α_1 e α_2

Per i sis del 2° ordine la condizione necessaria e sufficiente per avere stabilità asintotica $\Longleftrightarrow$ i coeff $\Delta_A(\lambda)$ sono concordi e non nulli

es $\Delta_A(\lambda) = \underset{\alpha_0}{s^3} + \underset{\alpha_1}{3s^2} + \underset{\alpha_2}{5s} + \underset{\alpha_3}{1}$

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ h_1 & h_2 & \\ K_1 & & \end{matrix}\right\| \qquad \begin{aligned} h_1 &= -\frac{1}{3}\det\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix} = \frac{14}{3} \\ h_2 &= -\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix} = 0 \\ K_1 &= -\frac{3}{14}\det\begin{bmatrix}3 & 1\\ \frac{14}{3} & 0\end{bmatrix} = +\frac{3}{14}\left(+\frac{14}{3}\right) = 1 \end{aligned}$$

Prima colonna: $1, 3, \frac{14}{3}, 1$

Vedo che sulla 1ª colonna ci sono elementi tutti concordi e $\neq 0 \Rightarrow$ SIS AS

Stabilità dei movimenti dei sistemi non lineari.

1) Linearizzazione:

$\dot{x} = f(x,u)$ $\quad (\bar{x},\bar{u}) =$ equilibrio $\quad f(\bar{x},\bar{u}) = 0 \quad \delta x = x-\bar{x} \quad \delta u = u - \bar{u}$

$$\delta\dot{x} = \dot{x} = f(x,u) \simeq \cancel{f(\bar{x},\bar{u})}_{=0} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{u}}\delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}}\delta u$$

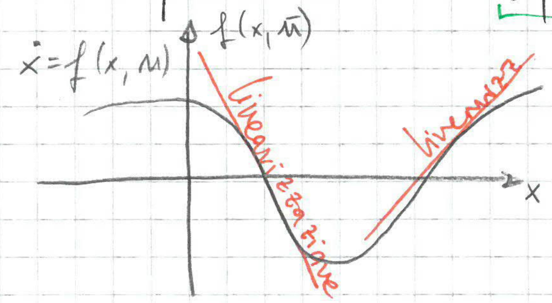
$$\left.\delta\dot{x} = \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{u}}}_{A_L}\delta x + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}}}_{B_L}\partial u\ \right] \to \delta\dot{x} = A_L\delta x + B_L\delta u \ \Big] \to \text{ha struttura di un sis lin}$$

δx è anche detta linearizzazione di $\dot{x} = f(x,u)$ intorno a (x,u)

Posso anche linearizz. l'eq di uscita

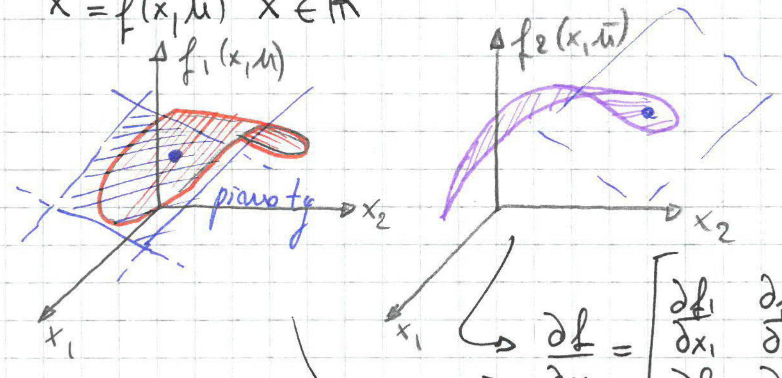
$$\delta y = y - \bar{y} = g(x,u) - g(\bar{x},\bar{u}) \simeq \cancel{g(\bar{x},\bar{u})} + \underbrace{\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{u}}}_{C_L}\delta x + \underbrace{\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}}}_{D_L}\delta u - \cancel{g(\bar{x},\bar{u})}$$

Posso perciò scrivere $\delta y = C_L\delta x + D_L\delta u$



Vediamo il caso bidimensionale:

$\dot{x} = f(x,\bar{u}) \quad x \in \mathbb{R}^2$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Esempi

$$h = (u - W_0)\cdot \frac{1}{\rho \cdot S} \qquad \rho = \text{densità} = 1 \qquad S = 10\, m^2$$

W_0 non è controllabile, dipende dalla tubatura e dal serbatoio

So che l'uscita dipende dalla quantità nel serbatoio.

Sperimentalmente (quantitativamente) $W_0 = \alpha \cdot \sqrt{h}$ pongo $\alpha = 1$ per semplificare i calcoli

perciò $x = h$
$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{10}\sqrt{x} + \frac{1}{10}u \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$
$\rightarrow$ sis non lin perché c'è la radice quadrata

pongo $\bar{u} = 1 \Rightarrow -\frac{1}{10}x^{1/2} + \frac{1}{10} = 0 \rightsquigarrow \bar{x} = 1$ $\rightarrow$ il mio pto. eq $\rightarrow (\bar{x}, \bar{u}) = (1, 1)$

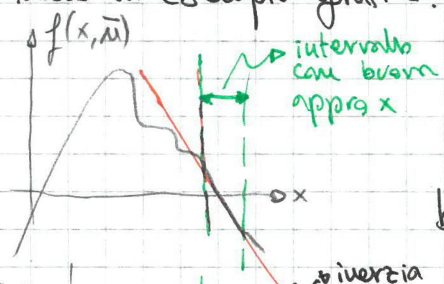
$$A_L = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\bar{x},\bar{u}} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{10}\sqrt{x} + \frac{1}{10}u\right)}{\partial x} = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)\bigg|_{\bar{x},\bar{u}} = -\frac{1}{20}$$
$\hookrightarrow$ A linearizzata

$$B_L = \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{\bar{x},\bar{u}} = \frac{1}{10} \qquad C_L = \frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{\bar{x},\bar{u}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}\bigg|_{\bar{x},\bar{u}} = 1/2 \qquad D_L = \frac{\partial g}{\partial u}\bigg|_{\bar{x},\bar{u}} = 0$$

Ottengo
$$\begin{cases} \delta\dot{x} = (-1/20)\delta x + (1/10)\delta u \\ \delta y = (1/2)\delta x + (0)u \end{cases}$$
$\rightarrow$ il sis linearizzato risulta essere AS.

Posso concludere qualcosa sul sis non lineare ora che ho info sul sis linearizzato?

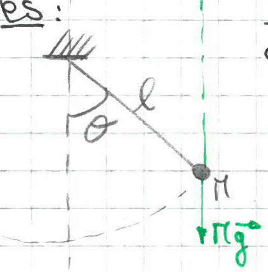
faccio un esempio grafico:



Nel grafico la linearizz rossa è AS. (vedi graficamente)

Posso concludere (tenendo conto che la linearizz introduce buona approx) che il sis non lin è anch'esso AS

es:



$$J\ddot{\theta} = -Mg\ell\sin(\theta) - K\dot{\theta} + c$$
$\rightsquigarrow$ inerzia angolare; c $\rightsquigarrow$ ipotetica coppia applicata esternamente

$\hookrightarrow$ coppia del peso $\quad$ $\hookrightarrow$ forza d'attrito $\qquad x_1 = \theta \quad x_2 = \dot{\theta}$

$J = M\ell^2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{K}{M\ell^2}x_2 + \frac{u}{M\ell^2} \end{cases}$$

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{K}{M\ell^2}x_2 + \frac{u}{M\ell^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Se voglio lin, devo trovare l'equilibrio. Supponiamo $\bar{u} = 0$

$$f(x,\bar{u}) = 0 = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{K}{M\ell^2}x_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi\gamma \\ 0 \end{bmatrix} \text{ in cui } \gamma = 0, 1, 2, \dots \in \mathbb{N}$$

$\pi\gamma$ rivela i due equilibri, pendolo verso il basso e verso l'alto

Ora linearizziamo per bene:

$$A_L = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\cos\bar{x}_1 & -\frac{K}{m\ell^2} \end{bmatrix} \qquad B_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell^2} \end{bmatrix}$$

equilibrio 1

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{K}{m\ell^2} \end{bmatrix} \qquad \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{g}{\ell} & \lambda + \frac{K}{m\ell^2} \end{bmatrix} = \lambda\left(\lambda + \frac{K}{m\ell^2}\right) + \frac{g}{\ell} \Rightarrow$$

$= \Delta_{A_L} \rightsquigarrow$ polinomio caratteristico di A_L

Posso applicare il crit. di Routh nel caso del 2° ordine.

tutti i coeff $\lambda\left(\lambda + \frac{K}{m\ell^2}\right) + \frac{g}{\ell}$ sono > 0] $\Rightarrow$ il sis linearizzato è AS.

equilibrio 2

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix} \Rightarrow A_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{K}{m\ell^2} \end{bmatrix} \qquad \det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -\frac{g}{\ell} & \lambda + \frac{K}{m\ell^2} \end{bmatrix} = \lambda\left(\lambda + \frac{K}{m\ell^2}\right) - \frac{g}{\ell} \Rightarrow \Delta_{A_L}$$

in questo caso ho un valore < 0] $\Rightarrow$ sis lin è INSTABILE

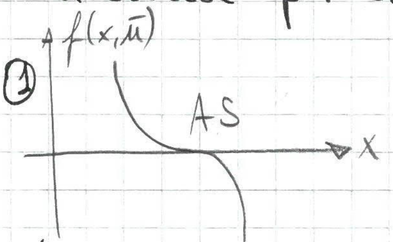
quindi anche con piccola perturbazione dell'equilibrio, il sistema divergerà.

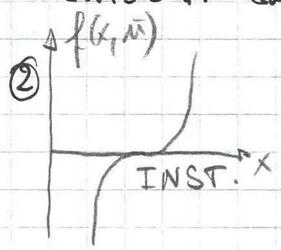
Dato $\dot{x} = f(x,u)$ con $f \in C$ e con $(\bar{x},\bar{u})$ equilibrio, posso def un sis linearizz. ~~attorno all'equilibrio~~ nell'intorno $(\bar{x},\bar{u})$ $\delta\dot{x} = A_L x + B_L u$

Teorema 1) Se A_L è AS $\Rightarrow (\bar{x},\bar{u})$ è AS per il sis non lin

Teorema 2) Se $\exists \lambda_i$ autovalore di A_L con $Re(\lambda_i) > 0 \Rightarrow (\bar{x},\bar{u})$ è INST. per sis nonlin

Cosa succede per sis linearizzati con $\lambda_i = 0$?





Entrambe le f hanno tangente $\to 0$ per $(x,u) \to (\bar{x},\bar{u})$, perciò le due f:

danno origine allo stesso sis lin danno stabilità diverse. Non sono in grado di stabilire una stabilità locale, devo vedere cosa accade attorno.

La linearizzazione ~~per~~ quindi non permette di ~~stab~~ analizzare la stabilità

Def: dato un $\bar{x}$ una f. scalare $V(x)$ é f. continua con anche le sue derivate prime continue é detta localmente:

- definita positiva se $V(\bar{x})=0$ e $V(x)>0 \ \forall x \in B_R(\bar{x})$
- semidefinita positiva se $V(\bar{x})=0$ e $V(x)\geq 0 \ \forall x \in B_R(\bar{x})$
- definita negativa se $V(\bar{x})=0$ e $V(x)<0 \ \forall x \in B_R(\bar{x})$
- semidefinita negativa se $V(x)=0$ e $V(x)\leq 0 \ \forall x \in B_R(\bar{x})$

Queste def sono globali se $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\emptyset\}$

$V(x)$ é quindi la nostra "energia" candidata. Vediamo come usarla.

Teorema di Lyapunov

Dato $\dot{x}=f(x)$ $f\in C^1$ e $\bar{x}$ sia pto eq:

se $\exists V(x) \in C^1$ che sia def. positiva,

se $\dot{V}(x)$ é semidef. negativa lungo le traiettorie del sis intorno a $\bar{x}$ $\Big] \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x}$ é STABILE

corollario: se $\dot{V}(x)$ é def. negativa, allora $\bar{x}$ é AS

(Oss: se "l'energia" diminuisce o rimane costante $\Rightarrow$ sis stabile, se invece l'energia decresce sempre (def negativa), allora abbiamo un ritorno a sempre lo stesso pto di equilibrio).

Stiamo dando uno sguardo più ampio a cosa succede al pto di equilibrio.

es: pendolo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{K}{Ml^2}x_2 + \frac{u}{Ml^2} \end{cases}$$

Considero $u=0$ e $\bar{x}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ (calcolato prima)

Analizziamo con Lyapunov

$$\underbrace{V(x)}_{\text{energia}} = \underbrace{\frac{1}{2}Ml^2x_2^2}_{\text{energia cinetica}} + \underbrace{Mgl(1-\cos x_1)}_{\text{energia potenziale}}$$

velocità tg del pendolo

(perché l'energia dipende dallo stato che a sua volta dipende da t)

regola derivaz. f. composte

per def so che $\dot{V}(x)=\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot f(x,\bar{u}) =$

$$= \underbrace{\left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \middle| \frac{\partial V}{\partial x_2}\right]}_{\frac{\partial V}{\partial x}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ \hline -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{K}{Ml^2}x_2 \end{bmatrix}}_{f(x,\bar{u})} = \left[Mgl\sin x_1 \middle| Ml^2x_2\right]\cdot\begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{K}{Ml^2}x_2\end{bmatrix} =$$

$$= \cancel{Mgl\,x_2\sin x_1} - \cancel{Mgl\,x_2\sin x_1} - Kx_2^2 =$$

$$= -Kx_2^2 = \dot{V}(x)$$

$\dot{V}(x) = -Kx_2^2 \begin{cases} <0 & \text{se } K>0 \quad \text{def neg} \quad (\text{ho attrito } \cancel{\text{per}} (K>0)) \\ \leq 0 & \text{se } K=0 \quad \text{semidef neg (non ho attrito } (K=0)) \end{cases}$

Vedo subito che se non ho attrito → sis oscilla stabilmente ⇒ Sis STABILE (NON Asintoticamente).

Se invece ho attrito vedo che è AS anche fisicamente

Rappresentazione del sistema ingresso/uscita] → Trasformata di Laplace

Posso studiare il sis senza dover passare per le variabili di stato?

Fin'ora abbiamo studiato $u \rightarrow \boxed{} \rightarrow y$ e abbiamo risolto come

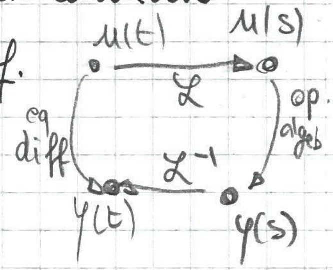
$u \rightarrow$ eq di stato $\rightarrow y$
$\quad \rightarrow$ risolvo eq diff $\rightarrow$

] → Voglio ora non guardare più le variabili interne. Bisogna introdurre prima dei concetti

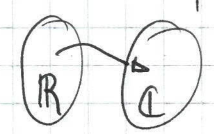
Si vuole definire uno spazio alternativo in cui ho un ingresso e calcolare l'uscita di un sis dinamico tramite operazioni algebriche.

Passo da dominio del tempo (risolvo tramite eq. diff) al DOMINIO DELLE TRASFORMATE (risolvo tramite eq algebriche oppure operazioni).

Ovviamente devo trovare l'antitrasformata per tornare al dominio del tempo. Tutto ciò per evitare di risolvere l'eq. diff.



$\mathcal{L}$ è operatore trasformata di Laplace



$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$ in cui $s \in \mathbb{C}$

F = funzione di Laplace che rappresenta la $f(t)$ trasformata

Def $\quad F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \cdot f(t)\, dt = \mathcal{L}[f(t)]$ se ∃ finito

La trasformata esiste per un ins. limitato di funzioni:

se data $f(t)$ $\exists\, \sigma_0 \in \mathbb{R}$: $\int_0^{\infty} |f(t)|\, e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$ (esiste finito) $\Rightarrow \exists\, \mathcal{L}[f(t)]$ $\forall s$ t.c. $Re(s) > \sigma_0$

Posso trasformare anche f che divergono a patto che l'esponenziale vinca sulla f, così che io possa integrare e avere il $\mathcal{L}[f(t)]$ finito.

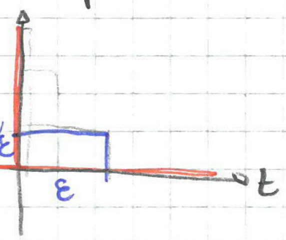
es: $f(t) = e^{-t}$ per $t \geq 0$ $\quad F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+1)t} dt = -\frac{1}{s+1} \cdot \left[e^{-(s+1)t} \right]_{0^-}^{\infty}$

$e^{-(s+1)t} = e^{-[Re(s) + j\, Im(s) + 1]t} =$
$= e^{-(\sigma+1+j\omega)t} = e^{-(\sigma+1)t} \cdot e^{-j\omega t} = e^{-(\sigma+1)t} \cdot [\cos\omega t + j \sin\omega t]$

$$= \frac{-1}{s+1}\left[e^{-(s+1)}\right]_0^{\infty} \underset{\uparrow}{=} \frac{-1}{s+1}\left[0-1\right] = \frac{1}{s+1}$$

se $Re(s) > 1$

Impulso $imp_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1/\varepsilon & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$ $\quad \lim_{\varepsilon \to 0} imp_\varepsilon(t) = \text{impulso} = \delta(t)$



con $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$ ⤳ l'area sottesa dall'impulso è 1

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\delta(t)\,dt = \begin{array}{l} 0 \ \forall t \neq 0 \\ e^{-st} \text{ per } t=0 \text{ e quindi vale } 1 \end{array} = 1$$

$$e^{-s\cdot 0} = 1 \cdot \delta(t)$$

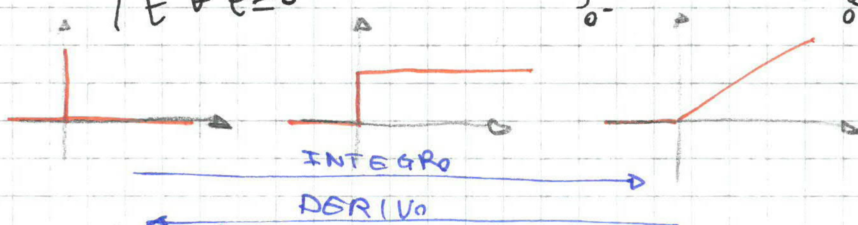
perciò $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

Segnali Canonici

$sca(t) = \begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ 1 & \forall t \ge 0 \end{cases}$ $\quad \mathcal{L}[sca(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} sca(t)\,dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$

$ram(t) = \begin{cases} 0 & \forall t<0 \\ t & \forall t \ge 0 \end{cases}$ $\quad \mathcal{L}[ram(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} ram(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-st}t\,dt = \cancel{\left[\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty}} + \int \frac{1}{s}e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}$

$\int f\,dg = fg - \int g\,df$ ⤳ $f=t \quad df = dt$



Proprietà di $\mathcal{L}[f(t)]$

1) Linearità: $\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1\mathcal{L}[f_1(t)] + a_2\mathcal{L}[f_2(t)]$

es: $\mathcal{L}[3e^{-t} + 4\,sca(t)] = \frac{3}{s+1} + \frac{4}{s} = \frac{7s+4}{s(s+1)}$

2) Traslazione nel tempo (ritardo)

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad \mathcal{L}[F(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s)$

DIM: $\mathcal{L}[f(t-\tau)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t-\tau)\,dt = \begin{array}{l} q = t-\tau \\ dq = dt \\ t = q+\tau \end{array} = \int_{-\tau}^{\infty} e^{-s\,q+\tau} f(q)\,dq = e^{-st}\int_{0^-}^{\infty} e^{-sq}f(q)\,dq =$

$e^{-s\tau}F(s)$

3) Traslazione in s $\quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad \mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$

es $\quad \mathcal{L}[e^{at}sca(t)] = \frac{1}{s-a}$

esercizio $\quad \cos \omega t = \left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right]\cdot\frac{1}{2}$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)\cdot sca(t)] = \mathcal{L}\left[\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right)sca(t)\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{j\omega t}sca(t)] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-j\omega t}sca(t)] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s-jw}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+jw} = \frac{1}{2}\frac{s+jw+s-jw}{s^2+w^2} = \frac{s}{s^2+w^2}$$

$\mathcal{L}[\sin wt \cdot sca(t)]$ sapendo che $\sin wt = \frac{e^{jwt}-e^{-jwt}}{2}$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-jw}-\frac{1}{s+jw}\right] = \frac{w}{s^2+w^2}$$

4) Cambio di scala nel tempo

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ $\quad \mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a\,F(a\cdot s)$ con $a>1$

5) Derivazione in frequenza

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ $\quad \mathcal{L}[t\,f(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$ $\quad$ es $f(t) = t\cdot sca(t) = ram(t)$

$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right)$

6) Derivazione nel tempo

$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$ (se la derivata di $f(t)$ é trasformabile secondo Laplace)

DIM:

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \overset{PP}{=} \left[f\cdot\frac{-1}{s}e^{-st}\right]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty}\frac{1}{s}e^{-st}\dot{f}(t)\,dt = \oplus + \frac{f(0^-)}{s} + \frac{1}{s}\mathcal{L}[\dot{f}(t)]$$

$f = f(t)$ $\quad df = \dot{f}dt$ $\quad dg = e^{-st}dt$ $\quad g = -\frac{1}{s}e^{-st}$

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df$$

perció $F(s) = \frac{f(0^-)}{s} + \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right]$

6b) Derivaz. nel tempo di ordine superiore

$$\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s\mathcal{L}[\dot{f}(t)] - \dot{f}(0^-) = s[s\mathcal{L}[f(t)] - f(0^-)] - \dot{f}(0^-) = s^2F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right] = s^kF(s) - s^{k-1}f(0^-) - s^{k-2}\dot{f}(t)\big|_{0^-} - s^{k-3}\ddot{f}(t)\big|_{0^-} - \dots - f^{(k-1)}(t)\big|_{0^-}$$

7) Integrale nel tempo

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ $\quad \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$ assumendo f integrabile da 0 a ∞

Antitrasformate

Vediamo il metodo per calcolare $\mathcal{L}^{-1}$ approssimato:

$F(s) \to$ caratteristiche fondamentali

Teorema valore iniziale

Hp $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \Rightarrow$ Th $f(0^+) = \lim_{s\to+\infty} sF(s)$ (se $\exists$ finito)

DIM:

$$\mathcal{L}[\dot f(t)] = sF(s) - f(0^-)$$

$$sF(s) = \int_0^\infty \dot f(t)\, e^{-st} dt + f(0^+)$$

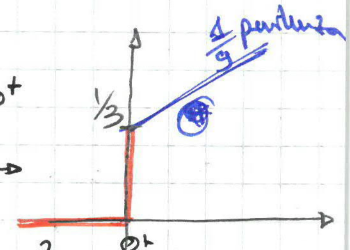
$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty}\left(\int_0^\infty \dot f(t)\, e^{-st} dt\right) + f(0^-) = \lim_{s\to\infty}\left(\int_{0^-}^{\infty} \dot f(t)\, e^{-st} dt + \int_{0^-}^{\infty} \dot f(t)\, e^{-st} dt\right) + f(0^+)$$

$$= \lim_{s\to\infty} f(t)\Big|_{0^-}^{0^+} + \lim_{s\to\infty}\int_{0^+}^{\infty} \dot f(t)\, e^{-st} + f(0^-) = f(0^+) \cancel{- f(0^-)} + \int_{0^+}^{\infty} \lim_{s\to\infty} \dot f(t)\, e^{-st} dt \cancel{+ f(0^-)} =$$

$$= f(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} \cancel{\lim_{s\to\infty} \dot f(t)\, e^{-st}} dt = f(0^+)$$

$\to 0$ ↳ se $f(t)$ trasf. con Laplace $\to$ $f(t)$ limitato in 0^+

$$F(s) = \frac{s+4}{3s^2+11s+10} \qquad f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(s+4)}{3s^2+11s+10} = \frac{1}{3} \to$$



↳ per 0^+ salta a $\frac{1}{3}$

Se faccio $\mathcal{L}[\dot f(t)] = sF(s) - f(0^+)$

$$\dot f(t)\Big|_{0^+} = \lim_{s\to\infty} s\left[sF(s) - f(0^-)\right] = \lim_{s\to\infty} \frac{s^3+4s^2}{3s^2+11s+10} = \infty \to \text{discontinuità}$$

Però posso modificare un attimo la funzione, come $\tilde F(s) = F(s) - \frac{1}{3}$ ↳ tolgo scalino per togliere la discont.

$$\dot{\tilde f}(t) = \lim_{s\to\infty} s\left[\tilde F(s) - \frac{1}{3s}\right] = \lim_{s\to\infty}\left(\frac{s^3+4s^2}{3s^2+11s+10} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\dot{\tilde f}(t) = \lim_{s\to\infty} s\left[sF(s) - \frac{1}{3}\right] = \lim_{s\to\infty} s\left[\frac{s^2-4s}{s^3+11s+10} - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{9} \to \text{derivata prima di } f \text{ valutata in } 0^+$$

Teorema del valore finale

Hp 1) $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

2) $F(s)$ i valori di s che annullano il denom. hanno $Re<0$ o sono nell'origine

$\Downarrow$

Th $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

es

$F(s) = \frac{s+4}{3s^2+11s+10}$ $\quad \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \frac{s^2+4s}{3s^2+11s+10} = 0$

---

es

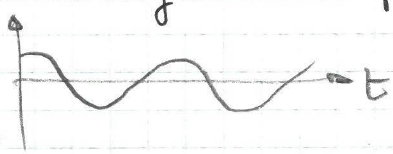
$F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ $\quad$ Teo valore finale $\lim_{s\to 0} sF(s) = \frac{s^2}{s^2+\omega^2} = 0$ per $\omega \neq 0$

Posso dire che $\lim_{t\to\infty} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = 0$? $\Longrightarrow$

$\Downarrow$

I valori che annullano il den sono $\bar{s} = \pm j\omega \rightarrow$ non posso applicare il Teo

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \cos\omega t \ \text{sca}(t)$



~~Esempio con Laplace~~

$\dot{y}(t) = -y(t) + u(t) \quad y(0) = 0 \quad u(t) = \text{sca}(t)$

$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s) = ? \quad \mathcal{L}[u(t)] = u(s) = \frac{1}{s} \rightarrow \mathcal{L}[\dot{y}(t)] = \mathcal{L}[-y(t) + u(t)] =$

$\mathcal{L}[\dot{y}(t)] = sY(s) - \underbrace{\cancel{y(0)}}_{0}$

$\Rightarrow sY(s) = -Y(s) + \frac{1}{s} \qquad Y(s)(s+1) = \frac{1}{s} \qquad Y(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

Applicando le proprietà, abbiamo scritto l'uscita senza op. diff

Ora antitrasformo, scomponendo $Y(s)$ con i fratti semplici

$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{A(s+1)+sB}{s(s+1)} \qquad \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$

$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \qquad \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \text{sca}(t)\left[1-e^{-t}\right]$

Sviluppo di Heavyside

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}$$ supponendo il caso in cui $n \geq m$

① $D(s)$ ha radici reali semplici

$$D(s) = a_n (s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n) \Rightarrow F(s) = \frac{\alpha_1}{s-p_1} + \frac{\alpha_2}{s-p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s-p_n} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_i}{s-p_i}\right] = \alpha_i e^{p_i t} \cdot \text{sca}(t)$$

es:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+1} = \frac{A+B}{s+1}$$ = non va bene perché non è radice semplice

Antitrasformata di segnali con radici non semplici

Abbiamo $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_i}{(s-p_i)^K}\right] = \alpha_i e^{p_i t} \cdot \frac{t^{K-1}}{(K-1)!} \cdot \text{sca}(t)$

es nel caso di $K=2$ $\mathcal{L}^{-1} = \alpha_i t e^{p_i t} \text{sca}(t)$

② $D(s)$ ha radici reali multiple

$$D(s) = a_n (s-p_1)^K (s-p_2)(s-p_j) \Rightarrow F(s) = \frac{\alpha_1}{(s-p_1)^K} + \frac{\alpha_2}{(s-p_1)^{K-1}} + \dots + \frac{\alpha_n}{(s-p_j)}$$

③ $n = m$ $F(s) = \frac{s+1}{s+2} = \frac{\alpha_1}{s+2} + \alpha_0 = \frac{\cancel{\alpha_1 + \alpha_0 s + 2\alpha_0}}{s+2}$ $\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_0 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = -1 \end{cases}$

$$F(s) = \frac{-1}{s+2} + 1 \qquad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = -e^{-2t} \text{sca}(t) + \delta(t)$$

Quando ho $n = m \Rightarrow$ devo considerare un termine noto nella scomposizione

④ $D(s)$ ha radici complesse coniugate

$$F(s) = \left(\frac{1}{s-p}\right)\left(\frac{1}{s-\bar{p}}\right) = \frac{1}{s^2 + b +} = \frac{1}{(s - \sigma + jw)} \cdot \frac{1}{(s - \sigma - jw)}$$ $\sigma = \text{Re}(p)$, $w = \text{Im}(p)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[K_1 \frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2 + w^2}\right] = K_1 e^{\sigma t} \cos(wt)\,\text{sca}(t) \rightarrow \text{ricavato da } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{w^2+s^2}\right] = \cos(wt)\,\text{sca}(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[K_2 \frac{w}{(s-\sigma)^2 + w^2}\right] = K_2 e^{\sigma t} \sin(wt)\,\text{sca}(t) \rightarrow \text{ricavato da } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{w}{s^2+w^2}\right] = \sin(wt)\,\text{sca}(t)$$

Nel caso in cui $D(s) = a_n (s-p_1)\dots(s^2 + bs + c)$ $F(s) = \frac{\alpha_1}{s-p_1} + \dots + K_1 \frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2 + w^2} + K_2 \cdot \frac{w}{(s-\sigma)^2 + w^2}$

in cui $\sigma = \text{Re}(\bar{s})$ in cui $\bar{s}^2 + b\bar{s} + c = 0$ e $w = \text{Im}(\bar{s})$

esempio

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+6} + \frac{\alpha_3}{s+1} = \frac{- - -}{s(s+6)(s+1)} = \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)s^2 +}{\dots}$$

$$\frac{+s(6\alpha_1+\alpha_1+\alpha_2+6\alpha_3)+6\alpha_1}{\dots}$$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \\ 6\alpha_1+\alpha_1+\alpha_2+6\alpha_3=1 \\ 6\alpha_1=2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1/3 \\ \alpha_2 = -1/5 \\ \alpha_3 = -2/15 \end{cases} \quad f(t) = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{15}e^{-6t} - \frac{1}{5}e^{-t}\right) sca(t)$$

es

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)^2} = \frac{\alpha_1}{s^2} + \frac{\alpha_2}{s} + \frac{\alpha_2}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_3}{s+1} = \frac{\alpha_{12}(s+1)^2 + \alpha_{11}s(s+1)^2 + \alpha_{22}s^2 + \alpha_{21}s^2(s+1)}{s^2(s+1)^2} =$$

$(s^4) \to \alpha_{11}+\alpha_{21}=0$

$(s^3) \to \alpha_{12}+2\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{21}=0$

$(s^2) \to 2\alpha_{12}+\alpha_{11}=1$

$(s^1) \to \alpha_{12}=2$

$$\begin{cases} \alpha_{11} = -3 \\ \alpha_{12} = 2 \\ \alpha_{21} = 3 \\ \alpha_{22} = 1 \end{cases}$$

$$f(t) = \left(2t - 3 + te^{-t} + 3e^{-t}\right) sca(t)$$

es

$$F(s) = \frac{(s+2)^2}{s(s+1)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \alpha_0 \qquad \frac{\alpha_1 s + \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_0 s^2 + \alpha_0 s}{s(s+1)}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_0 = 4 \\ \alpha_1 = 4 \end{cases} \quad \alpha_0 = 1 \quad \alpha_2 = -1$$

$$f(t) = 4\,sca(t) - e^{-t}sca(t) + \delta(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = \begin{cases} e^{-t}sca(t) \\ e^{-t} \ \forall t \geq 0 \end{cases}$$

es

$$F(s) = \frac{3s-4}{(s^2+2s+5)(s+2)} \qquad s_1 = -2 \qquad s_{2,3} = -1 \pm 2j \qquad = \frac{\alpha}{s+2} + K_1\frac{s+1}{(s+1)^2+4} + K_2\frac{\overset{=\omega}{2}}{(s+1)^2+\underset{\omega^2}{4}}$$

$$= \frac{s^2\alpha + 2\alpha s + 5\alpha + K_1(s+1)(s+2) + K_2\cdot 2(s+2)}{(s+2)(s^2+2s+5)}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + K_1 = 0 \\ 2\alpha + K_1 + 2K_1 + 2K_2 = 3 \\ 5\alpha + 2K_1 + 4K_2 = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ K_2 = 1/2 \\ K_1 = 2 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{-2}{(s+2)} + 2\frac{(s+1)}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$$f(t) = \left(-2e^{-t} + 2e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\right) sca(t)$$