Forza elettrostatica – campo elettrostatico

La legge di newton è uguale a:

$$F_g = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \textit{dove}$$

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$$

LEGGE DI COULOMB

$$F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

$K = 8.9875 \cdot 10^{9} \quad Nm^2/C^2$ *per ragioni pratiche si utilizza*

$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ *dove*

$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$ *con questa notazione si ha che:*

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Il valore della carica elementare espressa in Coulomb risulta:

$$e = 1.6022 \cdot 10^{-19} C$$

Quindi 1C equivale alla carica di

$$\frac{1}{e} = 6.24 \cdot 10^{18} \textit{elettroni}$$

Relazione tra la carica q e l'angolo θ formato da 2 cariche appese a due fili di lunghezza l

$$tg\theta = \frac{F_e}{F_g} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mg\left(2lsen\theta\right)^2}$$

$$\Rightarrow q = 2lsen\theta\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mgtg\theta}$$

osserviamo che la relazione tra q e θ non è lineare nemmeno per piccoli angoli.

Campo elettrostatico

La forza esercitata da 2 cariche q_1 e q_2 su una carica di prova q_0 positiva è data da:

$$F = F_1 + F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_0}{r_1^2} u_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2 \cdot q_0}{r_2^2} u_2$$

generalizzando:

$$F = \sum_i F_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i \cdot q_0}{r_i^2} u_i = q_0 \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2} u_i$$

La forza risultante F esercitata su q_0 è proporzionale a q_0. Chiamiamo campo elettrostatico la grandezza vettoriale:

$$E = \frac{F}{q_0} \qquad \vec{F} = \vec{E} \cdot q_0$$

Per cui il campo elettrostatico prodotto da una carica puntiforme q_1 nel punto P è dato da

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_1^2} u_1$$

$$\Rightarrow E = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2} u_i$$

In generale ogni punto dello spazio è soggetto ad un campo

$$\vec{E}\left(x,y,z\right) = \frac{\vec{F}\left(x,y,z\right)}{q_0}$$

ricordiamo che il campo è sempre minore della forza perché è un rapporto

Data una carica q ; e un punto P; calcolare il campo per P

La distanza tra il *punto "p"* e la *carica "q"* è data da

$$r = \sqrt{\left(x_p - x_q\right)^2 + \left(y_p - y_q\right)^2 + \left(z_p - z_q\right)^2}$$

Per cui il campo in modulo vale:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\left[\left(x_p - x_q\right)^2 + \left(y_p - y_q\right)^2 + \left(z_p - z_q\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Le coordinate di E sono:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot \left(x_p - x_q\right)}{r^3}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot \left(y_p - y_q\right)}{r^3} \quad \ldots$$

Forza elettrostatica generata da tre cariche uguali poste ai vertici di un triangolo equilatero:

$$F = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{l^2} \cdot \cos 30^\circ$$

$$E = \frac{2q\cos 30^\circ}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

osserviamo che il campo al centro del triangolo equilatero è nullo.

Campo elettrostatico in un punto P posto a distanza x da un ANELLO di raggio r :

Potenziale elettrostatico di un anello carico

Definiamo una densità lineare di carica λ

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{\left(x^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} u_x$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{\left(x^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} u_x$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{eqx}{4\pi\varepsilon_0 F}\right)^{\frac{2}{3}} - x^2}$$

per x>>r : $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{x^2} u_x$

Disco

$$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right] u_x$$

se x è positivo il campo risulta positivo, viceversa se x è negativo il campo è negativo

dove σ è la densità di carica ed è uguale a

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

Nel caso x>>R utilizzando lo sviluppo di Taylor si ha :

$$E \simeq \frac{q}{\pi R^2 2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} u_x$$

Per x<<R si ha $\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} u_x$

Nell' attraversare la superficie carica il campo elettrostatico subisce la discontinuità:

$$E_+ - E_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} u_x$$

Campo elettrostatico di 2 piani indefiniti carichi: il campo elett. Per una carica interna ai 2 piani vale: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} u_x$

mentre all'esterno dei 2 piani il campo è 0 in quanto essi si annullano a vicenda.

Campo generato da una sbarretta

Il campo generato da una sbarretta di lunghezza L risulta:

$E = \frac{\lambda sen\theta_1}{2\pi\varepsilon_0 x} u_x$ se L>>x si ha che:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \qquad F = eE = \frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

Moto di una carica in un campo elettrostatico

Una carica puntiforme immersa in un campo elettrostatico è soggetta alla forza:

$$F = ma \qquad qE = ma \qquad a = \frac{q}{m} E$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \quad a = \frac{q\sigma}{\varepsilon_0 m}$$

Se $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$ le leggi del moto sono:

$$x(t) = \frac{qE}{2m} t^2 \quad v(t) = \frac{qE}{m} t$$

$$v(x) = \sqrt{\frac{2qE}{m} x}$$

Come in meccanica il lavoro fatto dalle forze è uguale a:

$$W_{AB} = \Delta E_k = E_{kB} - E_{kA}$$

L'energia cinetica che acquista il corpo è data da: $E_K = qEx$

Il tempo e la velocità con cui si sposta la carica sono:

$t = \sqrt{\frac{2dm}{qE}} \qquad V = \sqrt{\frac{2qE}{m} d}$ d = distanza percorsa dalla carica

Nota: se prendiamo una carica –q si avrà un accelerazione negativa.

Cap. 2 LAVORO ELETTRICO POTENZIALE ELETTROSTATICO

Il lavoro della forza F per uno spostamento ds è dato da:

$$dW = F \cdot ds \Rightarrow q_0 E \cdot ds$$

Considerando gli infiniti termini:

$$W = q_0 \int_{C_1} E \cdot ds$$

Il lavoro per spostare una carica lungo il percorso chiuso C è dato da

$$W = q_0 \oint_C E \cdot ds = q_0 \cdot \&(f.e.m.)$$

Dove $\& = \oint_C E \cdot ds$ è detta forza elettromotrice o circuitazione.

Inoltre il campo elettrostatico è conservativo per cui il lavoro lungo un qualsiasi percorso chiuso è nullo.

Possiamo quindi introdurre la *funzione potenziale elettrostatico:*

$$V_B - V_A = -\int_A^B E \cdot ds$$

Per cui:

$$W_{AB} = -q_0\left(V_B - V_A\right) = -q_0 \cdot \Delta V$$

Introducendo l'energia potenziale avremo che: $\Delta U_e = q_0 \cdot \Delta V$

Il potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme q in un punto a distanza r è:

$$V\left(r\right) = -\int_\infty^r E \cdot ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Mentre l'energia potenziale è:

$$U_e\left(r\right) = q_0 V\left(r\right) = -q_0 \int_\infty^r E \cdot ds = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Il potenziale generato dal sistema di più cariche in un punto P(x,y,z) è:

$$V\left(x,y,z\right) = -\int_\infty^P E \cdot ds = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

Potenziale elettrostatico generato al centro di un triangolo equilatero da tre cariche uguali poste ai suoi vertici:

$$V = \frac{3q \cdot \sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTAICA o ENERGIA ELETTROSTATICA o ENERGIA POTENZIALE (U_e)

L'energia potenziale elettrostatica di un sistema formato da due cariche rappresenta il lavoro di una forza esterna per portare le due cariche dall'infinito alla distanza r; il lavoro è positivo se fatto contro la forza repulsiva tra cariche dello stesso segno, negativo se le cariche sono di segno opposto.

Per un sistema contenente più di due cariche si ha:

$$U_e(sistema) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

$$U_e(q_0) = \sum_{1\ i}^{n} \frac{q_i q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

$$U_e(totale) = U_e(sistema) + U_e(q_0)$$

Osserviamo che $U_e(sistema)$ rimane costante in tutti i processi in cui si sposta q_0

ENERGIA ELETTROSTATICA DI TRE CARICHE:

L'energia potenziale elettrostatica di un sistema di tre cariche ai vertici di un triangolo equilatero è:

$$U_e(sistema) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 l} \cdot \left[q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3\right]$$

Il lavoro W fatto per portare una carica q0 a distanza infinita è dato da:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sqrt{3}}{l} \cdot \left[q_0 q_1 + q_0 q_2 + q_0 q_3\right]$$

Conservazione dell'energia:

quando una carica q0 di massa m, si sposta da A a B l' energia cinetica della particella cambia, in particolare:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W$$

Il lavoro che essa compie è:

$$W = -\Delta U_e = -\left[U_e\left(B\right) - U_e\left(A\right)\right] =$$

$$= -\left(q_0 V_B - q_0 V_A\right)$$

Si ha quindi la relazione:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + q_0 V_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + q_0 V_B$$

Per cui possiamo scrivere la legge di conservazione dell'energia:

$$E = E_k + U_e = \frac{1}{2} m v^2 + q_0 V$$

Il **Potenziale elettrostatico** è:

$$V_B - V_A = -\int_A^B E \cdot ds = -E\left(z_B - z_A\right)$$

cioè in un campo elettrostatico uniforme, parallelo e concorde all'asse z si ha:

$$V\left(z\right) = -E \cdot z + \text{costante}$$

La d.d.p. tra un punto A a monte e un punto B a valle posti a distanza h è:

$$V = Eh$$

La Conservazione dell'energia in un campo uniforme è espressa da:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = q_0 E\left(z_B - z_A\right)$$

Nel caso di una *carica puntiforme* si ha:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

quando una particella carica viene accelerata guadagna energia cinetica e perde la stessa quantità di energia potenziale; l'energia totale rimane costante

L'unità di misura dell'energia cinetica è l' **eV** (elettronvolt)

$$1\ \text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} J \Rightarrow 1J = 6.25 \cdot 10^{18} eV$$

Esempio; accelerazione di un elettrone:

L'energia cinetica acquisita da un elettrone (e) che si sposta di un tratto d in un campo elettrostatico E è data da:

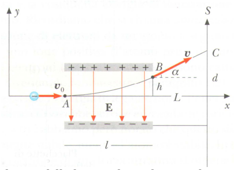
$$W_{AB} = \Delta Ek \Rightarrow eEd = Ek_B - \cancel{Ek_A}$$

$$Ek = eEh$$

Nota: nel caso ci viene data la densità di carica σ si ha: $Ek_B = \frac{E\sigma h}{\varepsilon_0}$

SEPARATORE ELETTROSTATICO

Consideriamo un elettrone che viene lanciato con velocità v0 in un campo elettrostatico:



Il moto dell'elettrone lungo l'asse x ;l'asse y e la relativa traiettoria sono:

$$x = v_0 t; y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2; y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{x^2}{v_0^2}$$

L'angolo di deflessione α e la distanza h sono:

$$tg\alpha = \frac{eEl}{mv_0^2}; \quad h = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{l^2}{v_0^2}$$

L'energia cinetica in B è

$E_{K(B)} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{e^2 E^2 l^2}{2mv_0^2}$ quindi la velocità vale: $v^2 = v_0^2 + 2ah$

La distanza d vale: $d = \frac{eEl}{mv_0^2}\left(\frac{l}{2} + L\right)$

Tohmson 1897: $e/m = 1.76 \cdot 10^{11} C/kg$

Energia potenziale elettrostatica dell'elettrone nell'atomo di idrogeno

$$U_e = -4.35 \cdot 10^{-18} \text{J}$$

$$U_{\text{energia di legame}} : 13.6\ eV = -21.8 \cdot 10^{-19} \text{J}$$

…………………………………………

SIGNIFICATO LETTERE GRECHE

λ=densità lineare

σ = densità di superficie

ρ=densità di volume

Potenziale elettrostatico di un anello carico

Definiamo una densità lineare di carica λ

$\lambda = \frac{q}{2\pi R}$ ogni elemento dell'anello dista da un punto P posto a distanza x dal centro dell'anello: $r = \sqrt{R^2 + x^2}$;

si ha: $V = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$

Quindi: $U_e = \frac{q_{carica} \cdot q_{anello}}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$

Per $x >> R \quad \Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|x|}$

Inoltre per il campo si ha:

$E_y = 0 \qquad E_z = 0$

Potenziale elettrostatico di un disco sottile con raggio R avente una carica q distribuita uniformemente su tutta la sua superficie:

La densità superficiale del disco è:

$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$ per cui il potenziale è:

$$V\left(x\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + x^2} - x\right)$$

Per x>>R si ha: $V\left(x >> R\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$

Inoltre si ha: $E_y = 0 \qquad E_z = 0$

Potenziale elettrostatico tra **due piani** indefiniti carichi con densità superficiale σ .

Ricordiamo che il campo tra 2 piani vale:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad V\left(x\right) = V_1 - E\left(x - x_1\right)$$

$$\Rightarrow \quad V\left(x\right) = V_1 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(x - x_1\right)$$

Dove V1 è il potenziale elettrostatico del piano positivo

Inoltre posto $h = x_1 - x_2$ si ha che la d.d.p. tra 2 piani vale:

$$\Rightarrow \quad V_1 - V_2 = \Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} h$$

Fuori dai piani il potenziale è costante

Potenziale elettrostatico di un filo di lunghezza l; il campo se il filo non è indefinito è:

$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{x} sen\theta$; nel caso il filo è indefinito:

$$sen\theta = 1 \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{x}$$

Il potenziale vale:

$$V\left(x_2\right) - V\left(x_1\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{x_1}{x_2}$$

$$V\left(x\right) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln x$$

Superfici Equipotenziali

Una superficie tridimensionale è detta equipotenziale se il potenziale elettrostatico ha lo stesso valore in ogni suo punto; cioè

$$V\left(x,y,z\right) = \text{costante}$$

Le superfici equipotenziali hanno equazione:

$$V\left(r\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \text{costante} \Rightarrow r = \text{costante}$$

Esse sono quindi rappresentate da sfere concentriche di raggio r

Inoltre le linee di forza e il campo E sono in ogni punto ortogonali alla superficie equipotenziale.

IL DIPOLO ELETTRICO

Un dipolo elettrico è costituito da due cariche uguali in modulo di segno "+q e –q" distanti tra loro una distanza "a".

Viene detto momento del dipolo elettrico il vettore : $\text{p} = \text{q}a$

Il potenziale generato dal dipolo elettrico in un punto P distante r1 e r2 dalle cariche +q e -q è:

$$V\left(P\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Per r>>a il potenziale risulta:

$$V\left(P\right)_{r>>a} = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \frac{\text{p} \cdot \hat{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Dove **p** è il momento del dipolo e $\hat{u}_r$ corrisponde con cosθ.

Il campo E generato dal dipolo in un punto a distanza r dal centro del dipolo è:

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\hat{u}_r + sen\theta\hat{u}_r\right)$$

Nei punti dell'asse del dipolo il campo elettrostatico è parallelo e concorde a **p** e vale:

$$E_{asse\ dipolo} = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Nel piano mediano $E_{\text{piano mediano}} = \frac{-p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

Dipolo in un campo elettrostatico uniforme:

Un dipolo elettrico immerso in un campo uniforme E è soggetto ad una coppia di forze uguali in modulo e parallele.

$F_1 = -qE \quad F_2 = +qE$ il momento meccanico risultante è uguale a:

$$M = p \wedge E = -pEsen\theta\hat{u}_z$$

Il lavoro del momento meccanico M per ruotare il dipolo dall'angolo θ_0 all'angolo θ è

$$W = \text{p}E\cos\theta - \text{p}E\cos\theta_0$$

Il lavoro coincide con la variazione di energia potenziale : $W = -\left[U_e\left(\theta\right) - U_e\left(\theta_0\right)\right]$

Dalla precedente si ha quindi l'energia potenziale elettrostatica di un dipolo che forma un angolo θ con le linee di forza di un campo E:

$$U_e = -\text{p}E\cos\theta = -\vec{\text{p}} \cdot \vec{E}$$

Cap.3 **LA LEGGE DI GAUSS**

Flusso del campo elettrostatico;

consideriamo una superficie d∑ in uno spazio in cui è presente un campo elettrostatico E orientata in base al verso del versore un. Si definisce flusso del campo E attraverso la superficie d∑ la quantità scalare:

$$d\Phi\left(E\right) = E \cdot u_n \cdot d\sum = E\cos\theta d\sum = E_n d\sum$$

Per cui il flusso totale attraverso una superficie chiusa è uguale all'integrale:

$$\Phi\left(E\right) = \oint_\Sigma E \cdot u_n \ d\sum$$

Se il prodotto $E \cdot u_n$ è >0 allora il flusso è uscente; se $E \cdot u_n < 0$ il flusso è entrante.

Se $\Phi\left(E\right) = 0$ allora il flusso entrante eguaglia quello uscente.

La legge di Gauss dice che il flusso del campo elettrostatico E prodotto da un *sistema di cariche* attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche elettriche contenute all'interno della superficie,diviso per ε_0

$$\Phi\left(E\right) = \frac{\left(\sum_i q_i\right)_{\text{interne}}}{\varepsilon_0}$$

Campo elettrostatico di una **distribuzione sferica** superficiale di carica.

Il flusso di una superficie sferica è:

$\Phi\left(E\right) = E\left(r\right) 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$ con $q = 4\pi R^2\sigma$

quindi: $E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{u}_r$

All'interno della superficie sferica il campo è 0; mentre per r→R dall'esterno il campo tende a

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Il potenziale elettrostatico vale:

$$V_{r>R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad V_{r\leq R} = V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Campo elettrostatico prodotto da una **sfera** uniformemente carica

$$E_{r\geq R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \hat{u}_r$$

Con $q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$

$$E_{r<R} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

Dove q' è la carica contenuta nella superficie ∑'

Il potenziale all'esterno della sfera è dato da:

$$V_{r>R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \boxed{V_{r=R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}}$$

All'interno della sfera

$$V_{r<R} = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Al centro della sfera

$$V_{r=0} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} = \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3}{2} V_{\text{superficie sfera}}$$

Consideriamo un nucleo atomico; esso può essere paragonato ad una distribuzione sferica continua di carica di valore complessivo Z*e* ; il campo sulla superficie è dato da: $E = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 R_n^2}$

Posto $R_n \simeq 10^{-15} m$ risulta $E \simeq 1.5Z \cdot 10^{21} V/m$

Campo elettrostatico di un cilindro uniformemente carico di raggio R e altezza h

Il flusso attraverso il cilindro è:

$$\Phi\left(E\right) = E\sum = 2\pi rhE = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

La carica contenuta nella superficie di gauss ∑ è:

$q = \int \rho d\tau = \rho\pi R^2 h = \lambda h$ con:

$$\boxed{\rho = \frac{q}{\pi R^2 h}} \quad \text{e} \quad \lambda = \rho\pi R^2 = \frac{q}{h}$$

Quindi il campo vale a seconda di r ed R

$$E_{r<R} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \qquad E_{r>R} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

La d.d.p. tra 2 punti P1 e P2 **esterni** al cilindro

$$V\left(P_1\right) - V\left(P_2\right) = -\int_{r_1}^{r_2} E\ dr = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1}$$

La d.d.p. tra 2 punti P1 e P2 **interni** al cilindro è:

$$V\left(P_1\right) - V\left(P_2\right) = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}\left[r_2^2 - r_1^2\right]$$

La d.d.p. tra 2 punti P1 interno e P2 esterno al cil. è:

$$V\left(P_1\right) - V\left(P_2\right) = \int_{r_1}^{R} \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr + \int_{R}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{r_1^2}{2}\right] + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{R}\right)$$

La d.d.p rispetto al bordo del cil. con $r \geq R$ è:

$$V\left(r\right) - V\left(R\right) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r}{R}$$

Campo Elettrostatico di un piano indefinito uniformemente carico su cui è distribuita una carica con densità superficiale σ .

Considerando come superficie a cui applicare la legge di gauss una scatola cilindrica con le basi di area Σ parallele al piano , in tal modo il flusso attraverso la superficie laterale della scatola cilindrica è nullo, mentre quello attraverso le basi parallele al piano vale:

$\Phi(E) = 2E\Sigma = \frac{\sigma\Sigma}{\varepsilon_0}$ quindi il campo:

$E = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ il campo risulta positivo se x>0; negativo se x<0.

Nel passaggio attraverso la superficie carica si ha la discontinuità:

$$E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}u_x$$

Il potenziale tra 2 punti distanti r1 e r2 dal piano con r2>r1 è data da:

$$V(x_2) - V(x_1) = -\int_{x_1}^{x_2} E\ dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1)$$

Capitolo 4.

Condizione di equilibrio di un conduttore:

$$E_{\text{interno}} = E + E_{\text{indotto}} = 0$$

Il campo elettrostatico nelle vicinanze della superficie del conduttore sferico, cilindrico , piano o irregolare è: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{u}_n$; il verso del campo è sempre perpendicolare alla superficie; σ è la densità di superficie.

All'interno del conduttore inoltre si ha:

$$V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot ds = 0$$

cioè la d.d.p. è costante.

D.d.p. tra punti interni o esterni appartenenti a sfere cave:

$\Delta V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$ dove r1 e r2 sono punti tra cui si ha variazione di *V*

Sfere conduttrici a contatto tramite un filo aventi carica totale q :

si avrà: $q = q_1 + q_2$; siccome il potenziale della superficie vale $V_{r=R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$

si avrà quindi che:

$$\begin{cases} \frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} \\ q = q_1 + q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}q \\ q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}q \end{bmatrix}$$

La densità di carica sulle sfere vale:

$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2}$ $\sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}$; in generale: $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \Rightarrow q = \sigma 4\pi R^2$

Vale inoltre la relazione:

$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$ e $\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}$

Conduttori cavi In un conduttore si ha: all'interno:

$$\begin{cases} E = 0 \\ V = \text{costante in tutto il conduttore} \\ \text{compresa la cavità} \end{cases}$$

All'esterno: $E_{\text{superficie}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{u}_n = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{u}_n$

Schermi elettrostatici

Un conduttore cavo è completamente isolato dall'esterno esso è uno schermo elettrostatico;

CONDENSATORI:

Il campo elettrostatico all'interno della cavità di un condensatore è:

$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$; invece la d.d.p. tra i due conduttori esterno – interno è:

$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ quindi

definendo la capacità di un condensatore:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1};$$

$$C = \frac{q}{\Delta V} \ ; \ q = C\Delta V \ ; \ \Delta V = \frac{q}{C}$$

Dove q è la carica presente sulle due armature e ΔV la d.d.p. tra le stesse.

L'unità di misura di un condensatore è il Farad simbolo F

$$F = \frac{C(Coulomb)}{V(Volt)}$$

millifarad	mF = 10^{-3}	F
microfarad	μF= 10^{-6}	F
nanofarad	nF=10^{-9}	F
picofarad	pF =10^{-12}	F

Capacità di un condensatore sferico:

la capacità di un condensatore sferico è:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Se $R_2 \to +\infty \ \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$ (questa è definita come: capacità di un conduttore sferico isolato)

Se il raggio delle armature del condensatore è molto grande e la distanza "h" tra le stesse è piccola , cioè:

$h = R_2 - R_1 << R_1 \simeq R_2 = R$ la capacità del condensatore risulta:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R^2}{h} = \frac{\varepsilon_0\Sigma}{h}$$

Dove $\Sigma = 4\pi R^2$ è l'area delle armature

Capacità di un condensatore cilindrico di altezza d:

la d.d.p. tra le armature del cilindro è:

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E\cdot dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Dove $\lambda = \frac{q}{d}$ è la carica per unità di lunghezza; si ha quindi:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 d}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

Se $h = R_2 - R_1$ è molto minore dei raggi si ha che sviluppando in serie il denominatore si ottiene:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 dR}{h} = \frac{\varepsilon_0\Sigma}{h}$$

Con $\Sigma = 2\pi Rd$ area delle armature distanti h.

Possiamo inoltre definire la capacità per unità di lunghezza $C_d = \frac{C}{d} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$;

in tal modo possiamo realizzare un condensatore cilindrico a capacità variabile facendo scorrere uno dei due cilindri lungo l'asse facendo variare la distanza d

Capacità di un condensatore piano con armature di area ∑ e distanti h su di cui è distribuita una carica +q e –q con densità rispettivamente di +σ e – σ :

la d.d.p. è:

$$V_1 - V_2 = Eh = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}h = \frac{\sigma\Sigma}{\varepsilon_0\Sigma}h = \frac{q}{\varepsilon_0\Sigma}h$$

Quindi la capacità di un condensatore piano è: $C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0\Sigma}{h}$

Campo elettrico dell'atmosfera terrestre:

$$\sigma = -\varepsilon_0 E_{terra} = -8.86\cdot 10^{-10}\frac{C}{m^2} \ (\text{densità})$$

$$q = -\sigma 4\pi R_{terra}^2 = -4.56\cdot 10^{15}C \ (\text{carica})$$

$$C = \varepsilon_0\frac{4\pi R_{terra}^2}{h} = 0.9F \ (\text{Capacità})$$

$$d.d.p = \Delta V = \frac{q}{C} \simeq 500\cdot 10^3 V$$

Condensatori in parallelo

Carica q presente su un singolo condensatore: $q = C\cdot V$

Definiamo capacità equivalente di un sistema di condensatori :

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2 + ... + C_n$$

In un sistema di condensatori in parallelo ai capi di ciascuno c'è la stessa d.d.p. e la capacità equivalente è la somma delle singole capacità.

Siano C1 e C2 due condensatori in parallelo con un armatura collegata a terra e caricati con d.d.p. V1 e V2 .

Si ha che:

$$V = \frac{q}{C_{eq}} = \frac{q}{C_1 + C_2} = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2}$$

Le cariche finali sulle armature dei condensatori saranno:

$q_1' = C_1 V$ $q_2' = C_2 V$

………………

Condensatori sferici (Sfere) collegate con un filo:

$$q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}q \ ; \ q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}q$$

Capacità di

C1 $C_{C_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1 + 4\pi\varepsilon_0 R_2}q$

Condensatori in serie

la c. eq. Di due condensatori in serie è:

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

In un sistema di condensatori in serie la carica è la stessa su ciascuno, l'inverso della capacità equivalente è somma degli inversi delle singole capacità.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ... + \frac{1}{C_n}$$

Energia del campo elettrostatico:

il lavoro per caricare un condensatore è:

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C}dq' = \frac{q^2}{2C}$$

Se l'energia iniziale del condensatore è nulla, durante il processo di carica si ha:

$$W = U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV$$

Capacità di un condensatore piano con armature di area $\sum$ e distanti h su di cui è distribuita una carica +q e –q con densità rispettivamente di +σ e – σ :
la d.d.p. è:

$$V_1-V_2=Eh=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}h=\frac{\sigma\sum}{\varepsilon_0\sum}h=\frac{q}{\varepsilon_0\sum}h$$

Quindi la capacità di un condensatore piano è: $C=\frac{q}{V_1-V_2}=\frac{\varepsilon_0\sum}{h}$

Condensatori in parallelo
Carica q presente su un singolo condensatore: $q=C\cdot V$

Definiamo capacità equivalente di un sistema di condensatori :

$$C_{eq}=\frac{q}{V}=C_1+C_2+....+C_n$$

In un sistema di condensatori in parallelo ai capi di ciascuno c'è la stessa d.d.p. e la capacità equivalente è la somma delle singole capacità.

Siano C1 e C2 due condensatori in parallelo con un armatura collegata a terra e caricati con d.d.p. V1 e V2 .
Si ha che:

$$V=\frac{q}{C_{eq}}=\frac{q}{C_1+C_2}=\frac{q_1+q_2}{C_1+C_2}=\frac{C_1V_1+C_2V_2}{C_1+C_2}$$

Le cariche finali sulle armature dei condensatori saranno:

$q_1'=C_1V \qquad q_2'=C_2V$

………………

Capacità di

C1 $C_{C_1}=\frac{4\pi\varepsilon_0R_1}{4\pi\varepsilon_0R_1+4\pi\varepsilon_0R_2}q$

Condensatori in serie
La capacità di due condensatori in serie è:

$$C_{eq}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

In un sistema di condensatori in serie la carica è la stessa su ciascuno, l'inverso della capacità equivalente è somma degli inversi delle singole capacità.

$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+...+\frac{1}{C_n}$$

Energia del campo elettrostatico:
il lavoro per caricare un condensatore è:

$$W=\int dW=\int_0^q\frac{q'}{C}dq'=\frac{q^2}{2C}$$

Se l'energia iniziale del condensatore è nulla, durante il processo di carica si ha:

$$W=U_e=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}qV$$

Carica dell'elettrone/protone $1.6\cdot10^{-19}C$

Massa dell'elettrone: $9.11\cdot10^{-31}kg$

Massa del protone: $1.67\cdot10^{-27}kg$

$\varepsilon_0=8.85\cdot10^{-12}$ $\qquad \mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$

prefisso	simbolo	valore
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
chilo	K	10^{3}
etto	h	10^{2}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	µ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}

Dielettrici
Lastra di dielettrico tra armature di un condensatore piano collegato con un generatore (V costante).
Nella condizione senza dielettrico si ha:

$$C_0=\frac{\varepsilon_0\sum}{h}\ ;\ q_0=C_0\cdot V_0\ ;$$

$$E_0=\frac{V_0}{h}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\ ;\ U_e=\frac{1}{2}C_0V_0^2$$

$$u_e=\frac{1}{2}C_0V_0^2$$

Nelle condizioni con dielettrico dato che :

$C=kC_0$ si ha:

$$q=CV_0=kq_0\ ;\ \sigma=k\sigma_0\ ;\ E=E_0=\frac{V_0}{h}\ ;$$

$$q_p=\frac{k-1}{k}q=(k-1)q_0=q-q_0\ ;$$

$$\sigma_p=(k-1)\sigma_0\ ;\ U_e'=\frac{1}{2}CV_0^2=kU_e\ ;$$

$$u_e'=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2=ku_e$$

Forza di risucchio di una lastra di dielettrico

$$F=\frac{\varepsilon_0(k-1)lV^2}{2h}$$

$W=Fl\ ;\ U_{e\ generatore}=2W$

Sfera conduttrice di raggio R in un dielettrico indefinito e omogeneo

induzione dielettrica D; $D(r)=\frac{q}{4\pi r^2}u_r$

campo $E(r)=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0kr^2}u_r$

Vettore polarizzazione

$$P(r)=\varepsilon_0(k-1)E=\frac{k-1}{k}\frac{q}{4\pi r^2}u_r$$

$$P(R)=\frac{k-1}{k}\frac{q}{4\pi R^2}u_r=\frac{k-1}{k}\sigma u_r$$

densità delle cariche di polarizzazione

$$\sigma_p=-P(R)=-\frac{k-1}{k}\sigma$$

Carica di polarizzazione: $q_p=-\frac{k-1}{k}q$

Capitolo 5: La corrente elettrica
Numero di elettroni liberi in un

m^3 di rame= $8.49\cdot10^{28}$

In un 1 m^3 di argento = $5.86\cdot10^{28}$

Definiamo con j il vettore densità di corrente

$J=nev$

Calcolare la velocità di deriva in un conduttore di rame cilindrico di sezione $\sum$ in cui scorre una corrente di densità i :
la densità di corrente nel conduttore è:

$$j=\frac{i}{\sum}\left(\frac{A}{m^2}\right)\ \Rightarrow\ V_d=\frac{j}{ne}\left(\frac{m}{s}\right)$$

dove n è il numero di elettroni liberi in un m^3 di rame. Nota: osserviamo che la velocità di deriva è bassissima rispetto alla velocità d'urto tra gli elettroni
$V_d\simeq0.1mm/s\ <<\ V_{urto}\simeq10^6m/s$

Definiamo con
σ la conducibilità di un conduttore
$\rho=1/\sigma$ resistività di un conduttore (inverso della conducibilità)
Si ha quindi che: $E=\rho\cdot J$
Considerando un conduttore di lunghezza h ed area $\sum$ si ha che: $V=V_A-V_B=\int_A^B E\cdot ds=Eh$

$V=\frac{\rho h}{\sum}i$ chiamando resistenza del conduttore la grandezza $R=\rho\frac{h}{\sum}$ si ottiene la

PRIMA LEGGE DI OHM

$$V=Ri\ ;\quad i=\frac{V}{R}\ ;\quad R=\frac{V}{i}$$

La d.d.p. ai capi di un conduttore è data dal prodotto tra la resistenza interna del conduttore e l'intensità di corrente che attraversa il conduttore

L' unità di misura della resistenza è l'OHM Ω e si misura in volt/ampere

---

Effetti termici della corrente sulla resistività
Tra temperature intorno ai 20°C la resistività (ρ) di un conduttore varia secondo la formula:

$$\rho=\rho_{20}(1+\alpha\cdot\Delta t)$$

Dove $\Delta t=t-20$ e ρ_{20} è la resistività a 20°C

Inoltre: $\alpha=\frac{1}{\rho_{20}}\frac{\Delta\rho}{\Delta t}$

EFFETTO JOULE
La potenza fornita da un generatore si misura in watt (W) ed è uguale a:

$$P=\frac{dW}{dt}=Vi\quad\Rightarrow\quad P=Ri^2=\frac{V^2}{R}$$

Conduzione elettrica:
considerando gli elettroni presenti in un conduttore metallico si ha che il tempo medio che intercorre tra un urto ed un altro si indica con $\tau=l/v$

se applichiamo un campo elettrico E esternamente al conduttore si ha che: la velocità di deriva degli elettroni tra 2 urti è:

$$V_d=-\frac{eE}{m}\tau$$

il vettore densità di corrente J è:

$$J=-neV_d=\frac{ne^2\tau}{m}E=\sigma E$$

Dove la conduttività σ è: $\sigma=\frac{ne^2\tau}{m}$

Esercizio: Calcolare il valore del campo elettrico E necessario per mantenere in un conduttore di rame ($\rho=1.67\cdot10^{-8}\Omega m$) una densità di corrente J = 2°/mm² ; si ha:

$E=\rho\cdot J \qquad \tau=\frac{m}{\rho ne^2}$ (tempo medio d'urto)

$V_{Fermi}=1.58\cdot10^6\ ;\ l=V_{Fermi}\cdot\tau$ (spazio percorso)

RESISTENZE IN SERIE: Due resistori sono collegati in serie quando hanno un estremo in comune;
→ in un collegamento in serie ciascun resistore è attraversato dalla stessa intensità di corrente
→la resistenza equivalente è somma della resistenza dei singoli componenti:

$$R_{eq}=R_1+R_2+R_3+...R_n$$

La potenza totale spesa è:

$$P=Vi=R_{eq}\cdot i^2=P_1+P_2$$

RESISTORI IN PARALLELO:
due resistori si dicono collegati i parallelo quando sono collegati tra loro in entrambi gli estremi
→in un collegamento in parallelo la d.d.p. è la stessa ai capi di ciascun resistore;
→l'inverso della resistenza equivalente è uguale alla somma degli inversi di ciascun componente.

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+...\frac{1}{R_n}$$

Inoltre si ha:

$$i=i_1+i_2=\frac{V}{R_{eq}} \qquad i_1=\frac{V}{R_1}=\frac{R_2}{R_1+R_2}i\ ;$$

$$i_2=\frac{V}{R_2}=\frac{R_1}{R_1+R_2}i\ ;\qquad P=Vi=R_{eq}\cdot i^2$$

Forza elettromotrice:
in un generatore sono presenti un campo elettrostatico ed un campo elettromotore.
Il campo elettrostatico è diretto dal polo positivo al polo negativo e la sua forza elettromotrice è 0
Il campo elettromotore invece è diretto dal polo negativo al polo positivo ed è in grado di far muovere le cariche fornendo una forza elettromotrice (fem).
Bisogna inoltre osservare che ogni generatore ha al proprio interno una certa resistenza (r) per cui la forza elettromotrice in un circuito è data da: $\varepsilon(f.e.m.)=(r+R)i=R_T\cdot i$

La d.d.p ai capi della resistenza esterna è:

$$V_A-V_B=Ri=\varepsilon-ri$$

Il lavoro dissipato dal generatore sotto forma di potenza elettrica è sempre dato da:

$$P=\varepsilon i=R_T\cdot i^2$$

In un circuito elettrico si ha il massimo trasferimento di potenza R quando R è uguale alla resistenza r del generatore. $R=r$

Carica di un condensatore attraverso un resistore

$$q(t)=C\varepsilon\left(1-e^{-t/RC}\right)$$

$$V_C(t)=\frac{q(t)}{C}=\varepsilon\left(1-e^{-t/RC}\right)$$

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$$

$$V_R(t)=Ri(t)=\varepsilon e^{-t/RC}$$

La carica finale del condensatore è uguale a:

$q_0=C\varepsilon$

SCARICA DI UN CONDENSATORE
Consideriamo un condensatore di carica iniziale q₀ ai cui capi c'è una d.d.p V₀ e che cede le cariche possedute ad un resistore R si ha che:

$$q(t)=q_0e^{-t/RC}$$

$$V_C(t)=\frac{q}{C}=\frac{q_0}{C}e^{-t/RC}=V_0e^{-t/RC}$$

$$i(t)=-\frac{dq}{dt}=\frac{q_0}{RC}e^{-t/RC}=\frac{V_0}{R}e^{-t/RC}=\frac{V_C}{R}$$

Nell' intero processo di scarica del condensatore viene dissipata l'energia:

$$W_R=\frac{1}{2}CV_0^2=\frac{q_0^2}{2C}$$

Leggi di kirchhoff
1ª legge di kirkoff o legge dei nodi: La somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è nulla.
2ª legge di kirkoff o legge delle maglie: la somma algebrica delle forze elettromotrici presenti nei rami della maglia è eguale alla somma algebrica dei prodotti $R_k\cdot i_k$ cioè delle differenze di potenziale ai capi dei resistori R_k situati nei rami della maglia

$$\sum_k R_ki_k=\sum_k\varepsilon$$

Bisogna considerare le seguenti regole:
a) se nel ramo k-esimo la corrente i_k è concorde al verso scelto nella maglia, R_ki_k ha segno positivo; in caso contario ha segno negativo.
b) se la sorgente di fem ε viene attraversata dal senso di percorrenza fissato nel verso che va dal polo negativo al polo positivo; essa va presa col segno positivo; in caso contrario con il segno negativo.

Capitolo 6
FORZA DI LORENTZ
A cui è soggetta una particella di carica q che si muove con velocità v ed immersa in un campo B

$$\vec{F}=qv\cdot B\cdot sen\theta$$

Dove θ è l'angolo che la traiettoria della particella forma con il campo B.

Siccome la forza è sempre ortogonale allo spostamento si ha che quando una carica si sposta da un punto P ad un punto Q la variazione di energia cinetica e il lavoro è

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}mv_Q^2-\frac{1}{2}mv_P^2=W=\int_P^Q F\cdot ds=0$$

L'unità di misura del campo magnetico (B) è il Tesla (T)

$$B=\frac{F}{qv}=\frac{[N]}{[C\cdot m/s]}=\frac{[N]}{[A\cdot m]}$$

Sottomultipli del Tesla sono il Gauss (G)
gauss $\quad 1G=10^{-4}T$
chilogauss $\quad 1kG=10^3G=10^{-1}T$

Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente
La forza che agisce su un filo di lunghezza **l** in cui scorre una corrente **i** ed immerso in un campo magnetico **B** è:

$F=il\wedge B \quad\rightarrow\quad F=ilBsen\theta$

Chiamando P e Q gli estremi del filo si ha:

$$F=i\int_P^Q ds\wedge B=i\cdot PQ\wedge B$$

Esercizio: dinamometro a bilancia
Quale campo bisogna applicare per equilibrare una bilancia che ha da un lato un peso di massa m e dall'altro un filo di lunghezza utile b (ortogonale al campo B) in cui passa corrente con una certa intensità. Bisogna che sia verificata l'equazione:

$$mg=ibB\quad\rightarrow\quad B=\frac{mg}{ib}$$

Esercizio: spira piana in un campo magnetico:
in un circuito chiuso a forma di semicirconferenza posto in un piano x , y di raggio R fluisce una corrente di intensità i ; perpendicolare al circuito è applicato un campo magnetico B; calcolare la forza magnetica sul tratto curvo e sul tratto rettilineo.
La forza sul tratto rettilineo è:

$$F=i\cdot PQ\wedge B=2iRBu_x\wedge u_y=2iRBu_z$$

La forza sul tratto curvilineo è:

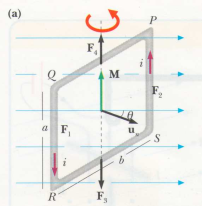
$$F=-iBu_z\int_{-R}^{R}dx=-2iRBu_z$$ uguale ed opposta alla forza esercitata sul tratto rettilineo.

Momento meccanico su un circuito piano:

$$M=bsen\theta F=i\cdot ab\cdot Bsen\theta=i\sum Bsen\theta$$

Dove $\sum$ è l'area della spira (=a x b)

(a)



Definiamo momento magnetico della spira il vettore:

$m=i\sum u_n$ per cui il momento meccanico M può essere scritto con:

$$M=m\wedge B=i\sum u_n\wedge B$$

Se la spira viene sospesa ad un filo si avrà un moto oscillatorio chiamando con I il momento di inerzia della spira si avrà che per piccoli angoli il moto della spira vale:

$$M_z=-mB\ sen\theta\simeq-i\sum_i Bsen\theta$$

$$M_z=I\frac{du}{dt}=I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mBsen\theta=I\frac{d^2\theta}{dt}$$

La pulsazione è :

$$\omega=\sqrt{\frac{mB}{I}}=\sqrt{\frac{I\sum B}{I}}=\frac{2\pi}{T}$$

$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mB}}$; l'energia potenziale del dipolo magnetico vale:

$$U_p=-m\cdot B=-mB\cos\theta=-i\sum B\cos\theta$$

Tra momento meccanico M ed energia potenziale sussiste la relazione:

$$M=-\frac{dU_p}{d\theta}=-mBsen\theta$$

Il GALVANOMETRO
Il galvanometro serve per misurare l' intensità della corrente.
Esso è costituito da N spire rettangolari di area $\sum$ in cui scorre corrente con intensità i libere di muoversi in un magnete che produce un campo magnetico B.
Il Galvanometro è in equilibrio quando si ha che:

$$k\theta=Ni\sum B\quad\Rightarrow\quad\theta=\frac{Ni\sum B}{k}$$

Supponendo che la scala del galvanometro sia graduata in modo tale che lo scostamento s è $s=ns_0$ allora l'angolo di cui si sposta l'indice del galvanometro è:

$\theta=ns_0/l$ per cui la corrente vale:

$i=\left(\frac{ks_0}{N\sum Bl}\right)n=Sn$ dove S è la sensibilità del galvanometro.

Effetto Hall
Un conduttore a forma di nastro sottile di sezione $\sum$= a b è percorso da corrente di intensità i concorde all'asse x.
La densità di corrente vale:

$$j=\frac{i}{ab}u_x=nev_d$$

Il campo di hall è quindi:

$$E_H=\frac{F}{e}=v_d\wedge B=\frac{j}{ne}\wedge B$$

La tensione di hall vale:

$$\varepsilon_H=E_H\cdot PQ=\pm E_Hb=\frac{jBb}{ne}=\frac{iB}{nea}$$

il segno è positivo se e>0 negativo se e<0
Se chiamiamo

$\alpha=\frac{\varepsilon_H}{B}=\frac{i}{nea}$ si ha: $\varepsilon_H=\alpha B$

Moto di una particella carica in un campo magnetico:
quando una particella con carica q entra in un campo magnetico B con velocità v ortogonale alle linee del campo (sen θ=1) si ha che la forza che subisce la particella è:

$F=qvB=ma=m\frac{v^2}{r}$ quindi il raggio di curvatura della traiettoria è:

$r=\frac{mv}{qB}=\frac{p}{qB}$ dove p è la quantità di moto

Inoltre la velocità angolare; il periodo e l' accelerazione centripeta sono:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}\qquad T=\frac{2\pi m}{qB}$$

La frequenza è : $\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{qB}{2\pi m}$

$a_c=\omega\wedge v \qquad \omega=-\frac{qB}{m}$ quindi la velocità angolare è sempre parallela a v
Si ha quindi la relazione:

$$B=\frac{mv}{qr}$$

Esercizio: se un fascio di elettroni viene accelerato dalla d.d.p. V=500 volt per calcolare la loro velocità si utilizza che:

$$\frac{1}{2}mv^2=eV\quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

Moto di una particella in un campo magnetico uniforme con θ generico: in questo caso la particella si muoverà di moto elicoidale spostandosi in avanti; la velocità della particella può essere scomposta in:

2 componenti:

$v_n=v\ sen\theta$ ortogonale a B e:

$v_p=v\cos\theta$ parallela a B

La forza magnetica che agisce sulla particella è:

$$F=qv\wedge B=q(v_n+v_p)\wedge B=qv_n\wedge B$$

il raggio di curvatura è:

$r=\frac{mv_n}{qB}=\frac{mv\ sen\theta}{qB}$;

la particella descrive quindi un moto elicoidale il cui **passo** è:

$$p=v_pT=\frac{2\pi\ m\ v\ \cos\theta}{qB}$$

Spettrometro di massa:
quando una particella carica si trova in un campo magnetico risente di una forza che è data dalla somma tra :

$$F=qE+qv\wedge B$$

Lo spettrometro di massa è uno strumento che separa ioni aventi la stessa carica ma di massa diversa ; le particelle vengono inviate da una sorgente tra due piastre che presentano un forellino e tra cui c'è una d.d.p. V ; poi entrano in un campo magnetico B nel quale vengono deflesse descrivendo una traiettoria di raggio calcolabile dalla loro impressione su di una lastra fotografica.
Si ha che il raggio di curvatura è:

$$r=\frac{mv}{qB};$$

$$\frac{m}{q}=\frac{Br}{V}=\frac{Br}{\sqrt{\frac{2E_x}{m}}}=\frac{Br}{\sqrt{\frac{2qV_p}{m}}}$$

quindi:

$$\frac{m^2}{q^2}=\frac{B^2r^2m}{2qV_p};\Rightarrow\ \frac{m}{q}=\frac{B^2r^2}{2V}$$

Selettore di velocità:
il selettore di velocità permette di separare da un fascio di cariche quelle che hanno una certa velocità v; esso consiste nell'applicare alle particelle 2 campi uno elettrico (E) ed uno magnetico (B) perpendicolari l'uno con l'altro:
si ha che la traiettoria di una particella rimane diritta se: $qE=qvB$ quindi la velocità della particella che ha una traiettoria rettilinea è: $v=\frac{E}{B}$;

Il ciclotrone è una macchina costituita da due dischi cavi a forma di D (D1 e D2) tra le cui cavità vi è un campo magnetico e disposti simmetricamente; ai dischi vi è inoltre applicata una d.d.p. variabile

$$V=V_0sen\omega_{Radio\ Frequenza}\cdot t$$

Quando una particella positiva di massa m e carica q entra nel ciclotrone essa descrive Una semicirconferenza di raggio:

$r_1=mv_1/qB$; tale particella assume nella prima D l'energia cinetica:

$E_{k1}=qV$ nella seconda D essa ha energia cinetica:

$$E_{k2}=E_{k1}+qV=2qV$$

La velocità angolare è:

$\omega=\frac{qB}{m}=\frac{2\pi}{T}$ quindi il periodo è:

$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi m}{qB}$; per cui il tempo per percorrere una semicirconferenza è

$$t=\frac{T}{2}=\frac{\pi m}{qB}$$

La condizione di funzionamento è che il tempo to impiegato a percorrere mezzo giro sia eguale al semiperieodo della radiofrequenza:

$$\frac{T_{RF}}{2}=T$$

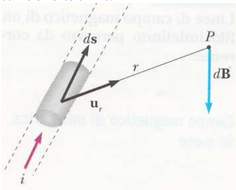
Affinché le particelle vengano accelerate con la massima energia cinetica si deve avere che: $\omega_{RF}=\omega$

La velocità massima delle partcelle è:

$v_{\max}=\frac{qBR}{m}$ dove R è il raggio del ciclotrone.
L'energia cinetica massima che può essere raggiunta è:

$$E_{k,\max}=\frac{1}{2}mv_{\max}^2=\frac{q^2B^2R^2}{2m}\quad[\text{MeV}]$$

Capitolo 7 Campo magnetico prodotto dalla corrente La prima legge di Laplace esprime il campo magnetico prodotto da un tratto infinitesimo *ds* di filo, percorso dalla corrente *i*, in un punto P distante r dall'elemento di filo.



$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds \wedge u_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ids}{r^2}u_t \wedge u_r$$

Dove μ_0 è detta permeabilità magnetica nel vuoto ed è uguale a

$$\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}\frac{Henrì}{m}$$

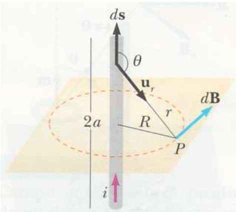
Il campo magnetic B in un circuito chiuso è dato dall'integrale lungo tutto il circuito

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint\frac{ds \wedge u_r}{r^2}$$

Campo magnetico di una carica in moto:
il campo magnetico prodotto da una <u>singola</u> carica q in moto ad una velocità v è:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv \wedge u_r}{r^2}$$

LEGGE DI BIOT-SAVART



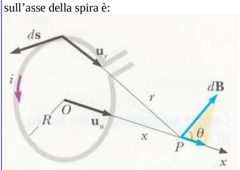
Il campo magnetico B che si trova nel punto P distante R dal centro del filo e situato nel piano mediano è:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\cos\theta_1\ \mathrm{u}_\phi = \frac{\mu_0 ia}{2\pi R\sqrt{R^2+a^2}}\ \mathrm{u}_\phi$$

SE il filo ha lunghezza indefinita (è molto lungo) si ha:

$$B_\infty = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\mathrm{u}_\phi$$

Campo magnetico di una spira circolare:
il campo magnetico prodotto da una spira circolare di raggio R in un punto P situato sull'asse della spira è:



$$B(x) = \frac{\mu_0 iR^2}{2r^3}\mathrm{u}_\mathrm{n} = \frac{\mu_0 iR^2}{2\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}\mathrm{u}_\mathrm{n}$$

Nel centro della spira il campo è massimo e vale: $B_{\max} = \frac{\mu_0 i}{2R}\mathrm{u}_\mathrm{n}$

Nel caso x>>R si ha:

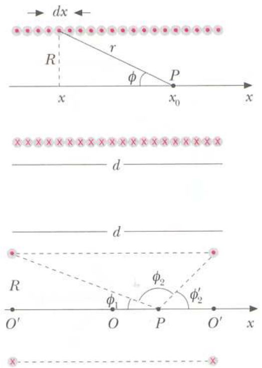
$$B(x) = \frac{\mu_0 iR^2}{2x^3}\mathrm{u}_\mathrm{n} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2i\pi R^2}{x^3}\mathrm{u}_\mathrm{n} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{r^3}$$

dove m è il momento magnetico della spira

$m = i\sum \mathrm{u}_\mathrm{n} = i\pi R^2\mathrm{u}_\mathrm{n}$;

per cui la spira assume il comportamento di un dipolo elettrico.

SOLENOIDE:
Consideriamo un solenoide di lunghezza d; raggio R ; N il numero totale di spire;
ed $n = N/d$ il numero di spire per unità di lunghezza



Il campo vale:

$$B(x) = \frac{\mu_0 ni}{2}\left[\frac{d+2x}{\sqrt{(d+2x)^2+4R^2}} + \frac{d-2x}{\sqrt{(d-2x)^2+4R^2}}\right]$$

Il campo magnetico è massimo al centro del solenoide e vale: $B_{\max} = \mu_0 ni\frac{d}{\sqrt{d^2+4R^2}}$

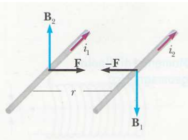
Nell'estremo O' si ha:

$$B_{(O')} = \frac{\mu_0 ni}{2}\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}$$

Se consideriamo un solenoide di lunghezza infinita si ha che in O il campo vale:

$$B_\infty = \mu_0 ni$$

Azioni elettromeccaniche tra fili percorsi da corrente
Consideriamo 2 fili rettilinei paralleli in cui scorre una corrente di intensità i



La forza per unità di lunghezza esercitata dal filo 1 sul filo 2 è:

$$F_{1,2} = i_2 u_2 \wedge B_1$$

Mentre la forza esercitata dal filo 2 sul filo 1 è:

$$F_{2,1} = i_1 u_1 \wedge B_2$$

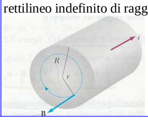
Risulta inoltre: $F_{1,2} = F_{2,1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r}$

questa è la forza che ciascuno dei due fili esercita sull'altro quando i è concorde in entrambi.

La forza che esercitano tra loro due fili circolari posti a *distanza a* l'uno dall'altro attraversati ciascuno da una corrente di intensità *i* è:

$$F = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi a}2\pi R$$

Conseguenze della LEGGE DI AMPERE
Campo prodotto da un filo rettilineo percorso da corrente; Consideriamo un filo conduttore rettilineo indefinito di raggio R

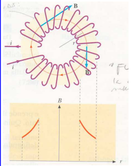


Si ha che il campo prodotto dalla corrente che attraversa il filo vale per:

$$r \ge R \qquad \to B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$0 \le r \le R \qquad \to B = \frac{\mu_0 jr}{2} = \frac{\mu_0 ir}{2\pi R^2}$$

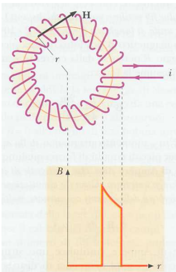
Campo magnetico prodotto da un solenoide toroidale:



Il campo magnetico prodotto da un solenoide toroidale è nullo sia nel cerchio interno che in quello esterno al solenoide e nel solenoide vale:

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r}$$

Solenoide toroidale riempito con un materiale avente permeabilità magnetica κ_m (o anche magnete toroidale)



Si ha che il vettore magnetizzazione H vale

$$H = \frac{Ni}{2\pi r}$$

Il campo B è:

$$B = \frac{\mu_0\kappa_m Ni}{2\pi r}; \qquad \mathrm{M} = \frac{\chi_\mathrm{m} Ni}{2\pi r}$$

La corrente di magnetizzazione complessiva è :

$$i_m = M\,2\pi r = \chi_m Ni$$
